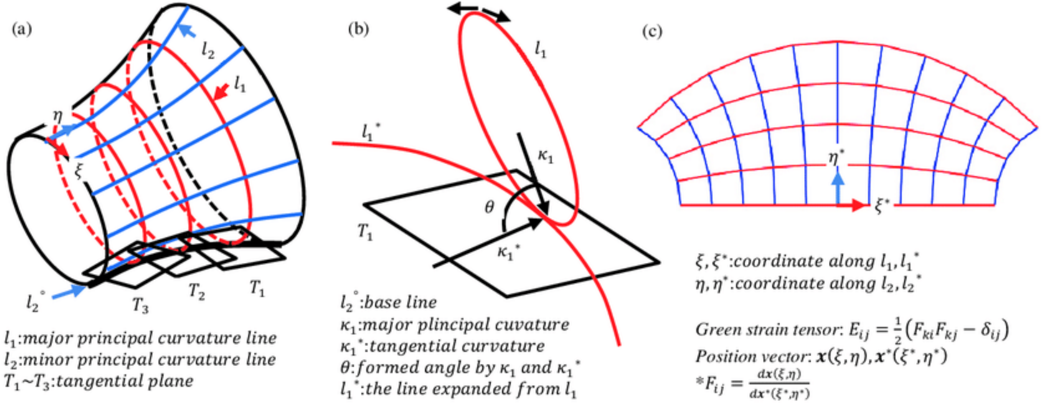
Aplicaciones de la Segunda Forma Fundamental

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 20) 13.abril.2023

Aplicaciones de la Segunda Forma



Las curvaturas principales κ_1 y κ_2 están relacionadas con el tensor de estrés.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Aplicaciones de la Segunda Forma

(a) La Sagrada Familia (Gaudi). (b) Detalle de catenarias en las columnas

Ver https://www.youtube.com/watch?v=KXP_kPPc7LY

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Aplicaciones de la Segunda Forma

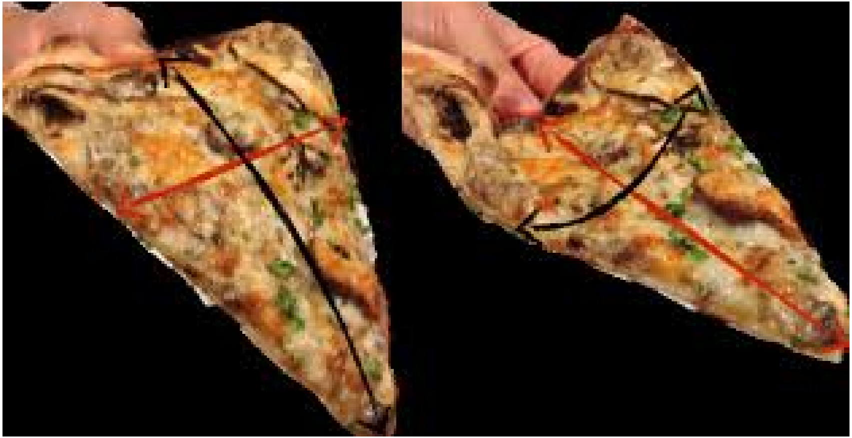
Puente formado por lineas de curvatura (Schlaich).

Ver https://www.youtube.com/watch?v=VeahtDy7n8I&t=5s

Aplicaciones de la Segunda Forma

Variedad de estructuras arquitectónicas basadas en superficies.

Aplicaciones de la Segunda Forma



Gauss nos enseña hasta como se debe tomar un pedazo de pizza.

Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano)

Tomemos la parametrización $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$, con $\{\mathbf{w}_1, w_2\}$ base del plano. Luego, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1, \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$.

De ahí,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})|} = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|}$$

es constante.

$\Rightarrow DN(\mathbf{p}) = 0$, $\forall \mathbf{p} \in S$. Así, si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son las direcciones principales, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_2.$$

De modo que $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 0$.

En este caso $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Ejemplos

Ejemplo 2: (Esfera de radio R)
Para una esfera S^2 de radio R (centrada en el origen), tenemos que la aplicación de Gauss, con la orientación que apunta todos los vectores normales hacia el origen, es

$$N(\mathbf{p}) = -\tfrac{1}{R}\mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S^2.$$

Luego, $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R} I \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R}\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$. En particular,

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{R}||\mathbf{v}||^2.$$

Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son las direcciones principales en S_R^2, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\tfrac{1}{R}\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\tfrac{1}{R}\mathbf{e}_2.$$

Luego, $\kappa_1 = \frac{1}{R}$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, y $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{R}$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$.

Ejemplo 3: (Cilindro)

Consideramos el cilindro $S = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$. $S = f^{-1}(R^2)$, con $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, y como R^2 es valor regular de f, S es superficie regular orientable. Además,

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{|(2x, 2y, 0)|} = -\tfrac{1}{R}(x, y, 0) = -\tfrac{1}{R}\mathbf{p}.$$

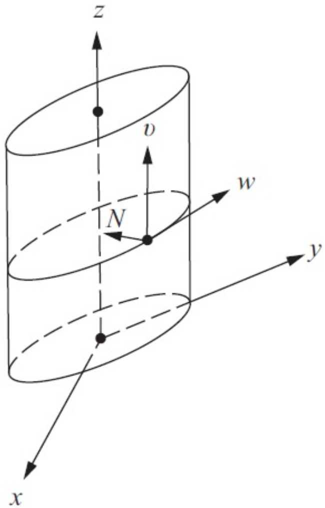
Consideramos la curva $(x(t), y(t), z(t))$ contenida en el cilindro, es decir, con $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$. A lo largo de esta curva, $N(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), 0)$ y por lo tanto,

$$DN(\mathbf{p}) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = \tfrac{1}{R}(-x'(t), -y'(t), 0).$$

Ejemplos

Concluimos lo siguiente:
Si $\mathbf{w}_1$ es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z, entonces $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1$;
si $\mathbf{w}_2$ es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy, entonces $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{R}\mathbf{w}_2$.

De ello se deduce que $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son los autovectores de $DN(\mathbf{p})$, con autovalores $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, respectivamente.



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA