Áreas en superficies

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 18) 23.marzo.2023

Primera forma fundamental

En el aula anterior vimos que si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, entonces tenemos definida una forma cuadrática en cada punto $\mathbf{p} \in S$, llamada la forma fundamental $I_\mathbf{p} : T_\mathbf{p}S \to \mathbb{R}$ por

$$I_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_\mathbf{p}.$$

Además, si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización alrededor de $\mathbf{p}$, y si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es una curva con $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, y con coordenadas $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, entonces la expresión de $I_\mathbf{p}$ en coordenadas locales es

$$I_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

De modo que podemos escribir $I_\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

Primera forma fundamental

donde $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ y $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Vimos que

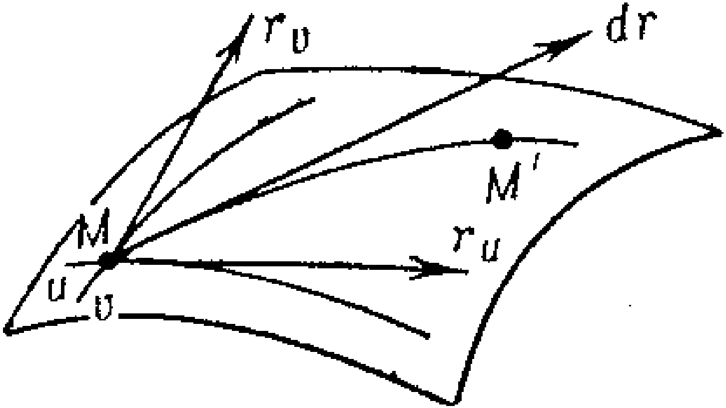
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

donde ds es el *elemento de longitud de arco*. Equivalentemente, en coordenadas locales tenemos que

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

da la longitud de arco.

Primera forma fundamental



Geometría de la primera forma fundamental.

Primera forma fundamental

Escribimos también
$$I_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij}),$$
donde $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.
En general, en el caso de hiperficies $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, esto es superficies de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+1}$ (o de codimensión 1), la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$ se generaliza a la forma cuadrática
$$I_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$
donde $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

Lema

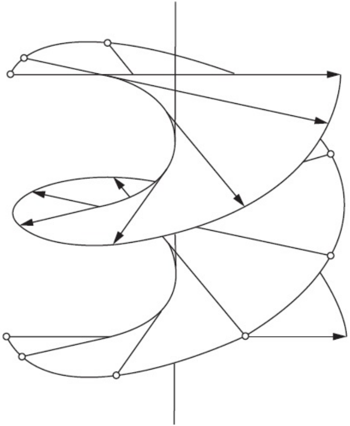
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{x}$ parametrización de S, y $\widetilde{\mathbf{x}} \circ \varphi$ otra parametrización obtenida mediante un cambio de coordenadas $\varphi : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Bajo este cambio de coordenadas, la primera forma fundamental en $\mathbf{p} \in S$ se comporta como

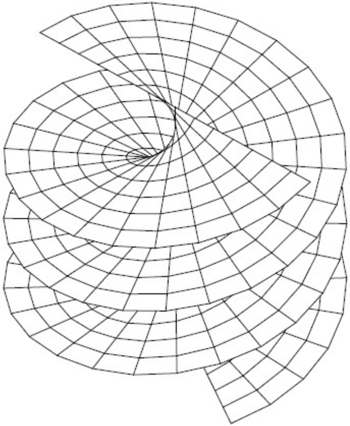
$$(\widetilde{g}_{ij}) = D\varphi(\mathbf{p})^T \, (g_{ij}) \, D\varphi(\mathbf{p}).$$

Prueba:
La ecuación $(g_{ij}) = D\mathbf{x}(\mathbf{p})^T \cdot D\mathbf{x}(\mathbf{p})$ es directa. Luego

$$\begin{aligned}(\widetilde{g}_{ij}) &= D\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{p})^T \cdot D\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) = D(\mathbf{x} \circ \varphi)(\mathbf{p})^T \cdot D(\mathbf{x} \circ \varphi)(\mathbf{p}) \\ &= D\varphi(\mathbf{p})^T D\mathbf{x}(\mathbf{q})^T D\mathbf{x}(\mathbf{q}) D\varphi(\mathbf{p}) = D\varphi(\mathbf{p})^T \cdot (g_{ij}) \cdot D\varphi(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Ejemplo:
Consideremos la helicoide





Primera forma fundamental

Una parametrización de la helicoide $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0, u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

En este caso, $\mathbf{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$ y $\mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$, y tenemos

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = v^2 + a^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1,$$

y $I_\mathbf{p} = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Primera forma fundamental

De la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$ se derivan varias cantidades importantes. Ya vimos una, el elemento de longitud ds:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2.$$

Otra cantidad que se deriva de $I_{\mathbf{p}}$ es el coseno angular entre las curvas coordenadas canónicas $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{||\mathbf{x}_u||\;||\mathbf{x}_v||} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

El determinante de la primera forma fundamental también juega un papel importante en la integración de funciones. De alguna manera, $\det(g_{ij})$ indica el elemento de superficie o elemento de área que se utiliza en las llamadas integrales de superficie.

Recordemos que si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ son vectores, entonces el área del paralelogramo generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (en ese orden) está dado por $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Propiedad

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = ||\mathbf{a}||^2 \; ||\mathbf{b}||^2.$$

Prueba: Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 &= |(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2)|^2 + \langle a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \rangle^2 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\
&= (a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2) + (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2) \\
&= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = ||\mathbf{a}||^2 \; ||\mathbf{b}||^2.
\end{aligned}$$

Áreas

Reescribiendo la propiedad anterior, tenemos

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = ||\mathbf{a}||^2 \, ||\mathbf{b}||^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2.$$

En particular, cuando tomamos la base canónica del plano $T_{\mathbf{p}}S$, obtenemos la siguiente forma de calcular el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$:

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 = ||\mathbf{x}_u||^2 \, ||\mathbf{x}_v||^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = EG - F^2.$$

En otras palabras, el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$ es

$$area(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \sqrt{\det I_{\mathbf{p}}}.$$

Definición

*Un **dominio** D de una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es un abierto conexo tal que la frontera ∂D es la imagen de una aplicación diferenciable $f : S^1 \to \partial D$, y es un homeomorfismo regular, excepto posiblemente en un número finito de puntos.*

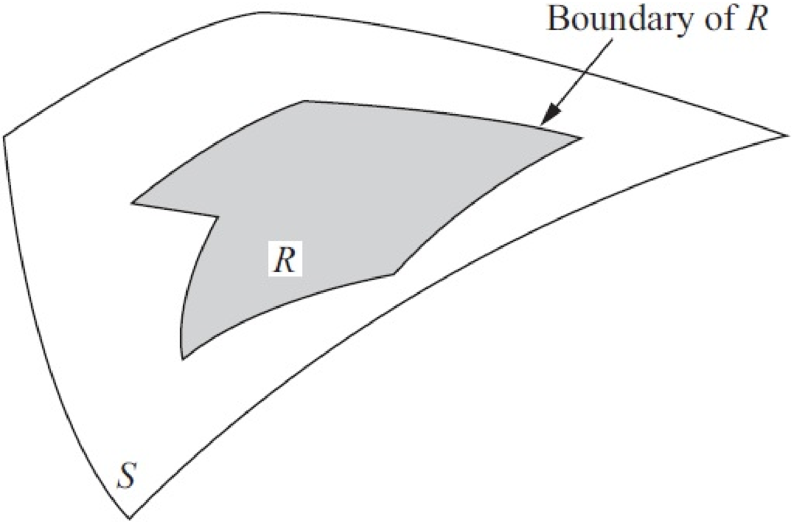
*Una **región** R es la unión de un dominio D con su frontera, i.e. $R = D \cup \partial D$.*

Propiedad

Sea S superficie regular, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ parametrización. Si $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ es una región en S, entonces $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ es una región en U.

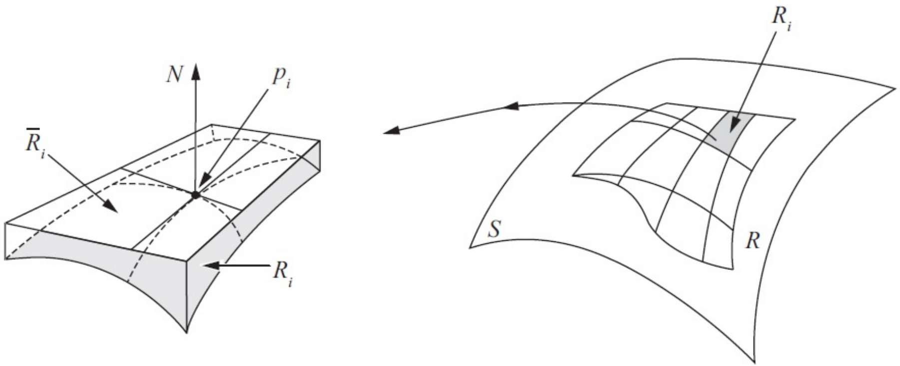
<u>Prueba</u>: Ejercicio!

Áreas



Áreas

Para definir el área de una región $R \subseteq S$ comenzamos con una partición $\mathcal{P}$ de R en un número finito de regiones R_i, es decir, $R = \bigcup_i R_i$, donde la intersección de dos de tales regiones $R_i \cap R_j$ es vacía o formada por puntos límite de ambas regiones.



Áreas

El diámetro de R_i es el supremo de la distancias (en $\mathbb{R}^3$) de dos puntos cualesquiera en R_i, esto es, $\operatorname{diam} R_i = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in R_i} ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$; el mayor diámetro de los R_i en la partición $\mathcal{P}$ se llama la **norma** $||\mathcal{P}||$ de $\mathcal{P}$.
Considerando ahora una partición de cada R_i, obtenemos una segunda partición de R, que refina a $\mathcal{P}$.

Dada una partición $R = \bigcup_i R_i$ de R, elegimos arbitrariamente los puntos $\mathbf{p}_i \in R_i$ y proyectamos R_i sobre el plano tangente en $\mathbf{p}_i$ en la dirección de la normal en $\mathbf{p}_i$; esta proyección se denota por $\overline{R}_i$ y su área por $A(\overline{R}_i)$. La suma $\sum_i A(\overline{R}_i)$ es una aproximación del área de R.

Eligiendo particiones $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k, \ldots$ cada vez más finas y tales que $||\mathcal{P}_k|| \to 0$, existe el límite

$$\lim_{||\mathcal{P}_k||\to 0} \sum_i A(\overline{R}_i).$$

Este límite es independiente de todas las particiones.

Definición

Bajo la construcción anterior, decimos que la región R ***tiene un área*** $A(R)$ *dada por*

$$A(R) = \lim_{||\mathcal{P}_k|| \to 0} \sum_i A(\overline{R}_i).$$

Mostramos ahora que toda región limitada R en una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$ posee un área.
Por simplicidad, vamos a restringirnos a regiones contenidas dentro de una vecindad parametrizada $\mathbf{x}$, y obtendermos una expresión para el área en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental de $\mathbf{x}$.

Teorema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y $R \subseteq S$ una región limitada en S, contenida dentro de una vecindad parametrizada $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$. Entonces, el área superficial de R está dada por

$$A(R) = \iint_Q |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \, du \, dv, \quad com \ Q = \mathbf{x}^{-1}(R).$$

<u>Prueba</u>: Considere una partición $R = \bigcup_i R_i$ de R. Como R es cerrado y limitado, es compacto, y podemos suponer que la partición está suficientemente refinada de modo que dos líneas normales de R_i nunca sean ortogonales.

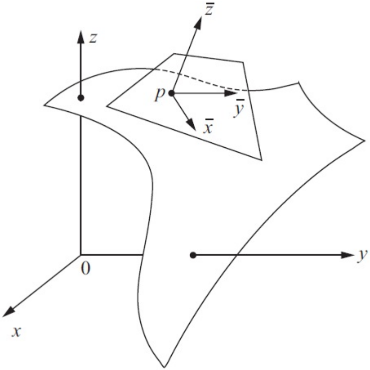
Áreas

Como estas normales varían continuamente en S (campo normal continuo), para cada $\mathbf{p} \in R$ existe una vecindad $V_{\mathbf{p}} \cap S$ de $\mathbf{p}$ donde dos normales cualesquiera nunca son ortogonales; estas vecindades forman una cobertura abierta de R.

Siendo R compacto, considerando una partición $\mathcal{P}$ de R cuya norma $||\mathcal{P}|| < \lambda$, el número de Lebesgue de la cobertura.

Fijamos una región R_i de la partición y elegimos un punto $\mathbf{p}_i \in R_i = \mathbf{x}(Q_i)$. Queremos calcular el área de la proyección normal $\overline{R}_i$ de R_i sobre el plano tangente $T_{\mathbf{p}_i}S$. Para hacer esto, considere un nuevo sistema de ejes $O\overline{xyz}$ en $\mathbb{R}^3$, obtenido de $Oxyz$ por una transformación rígida, de modo que el eje $\bar{z}$ coincida con la normal ${}_i$ en $\mathbf{p}_i$, y el plano $O\overline{xy}$ con el plano tangente $T_{\mathbf{p}_i}S$, y ambos sistemas tengan la misma orientación.

Áreas



En los nuevos ejes, la parametrización se puede escribir

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = \big(\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v)\big).$$

Áreas

En esas nuevas coordenadas, se tiene

$$\frac{\partial(\overline{x},\overline{y})}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \text{en } Q_i;$$

de lo contrario, la componente $\overline{z}$ de algún vector normal en R_i es cero y hay dos líneas normales ortogonales en R_i, contrario a la hipótesis.

La expresión de $A(\overline{R}_i)$ es dada por

$$A(\overline{R}_i) = \iint_{\overline{R}_i} d\overline{x}\, d\overline{y}.$$

Como $\frac{\partial(\overline{x},\overline{y})}{\partial(x,y)} \neq 0$, hacemos el cambio de coordenadas $\overline{x} = \overline{x}(u,v)$, $\overline{y} = \overline{y}(u,v)$ y

$$A(\overline{R}_i) = \iint_{Q_i} \frac{\partial(\overline{x},\overline{y})}{\partial(u,v)}\, du\, dv.$$

Áreas

Como los vectores $\bar{\mathbf{x}}_u$ y $\bar{\mathbf{x}}_v$ pertenecen al plano $O\bar{x}\bar{y}$, entonces $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0$ en $\mathbf{p}_i$. Luego

$$\left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| = \left|\bar{\mathbf{x}}_u \times \bar{\mathbf{x}}_v\right|, \quad \text{en } \mathbf{p}_i.$$

De ahí,

$$\left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \left|\bar{\mathbf{x}}_u \times \bar{\mathbf{x}}_v\right| = \varepsilon_i(u,v), \ \ \text{para } (u,v) \in Q_i,$$

donde $\varepsilon_i(u,v)$ es una función continua en Q_i con $\varepsilon_i(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}_i)) = 0$.
Dado que la norma de un vector se preserva por movimientos rígidos,

$$\left|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\right| = \left|\bar{\mathbf{x}}_u \times \bar{\mathbf{x}}_v\right| = \left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \varepsilon_i(u,v).$$

Áreas

Sean m_i y M_i el mínimo y máximo de la función $\varepsilon_i(u,v)$ en la región compacta Q_i. En particular,

$$m_i \leq \left| \left| \frac{\partial(\overline{x},\overline{y})}{\partial(u,v)} \right| - |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \right| \leq M_i, \quad \text{en } Q_i,$$

Integrando la desigualdad anterior sobre Q_i

$$\Rightarrow m_i \iint_{Q_i} du\,dv \leq \left| A(\overline{R}_i) - \iint_{Q_i} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\,du\,dv \right| \leq M_i \iint_{Q_i} du\,dv, \quad \forall i.$$

Haciendo lo mismo para todos los R_i, obtenemos

$$\sum_i m_i A(Q_i) \leq \left| \sum_i A(\overline{R}_i) - \iint_Q |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\,du\,dv \right| \leq \sum_i M_i A(Q_i).$$

Áreas

Ahora, refinamos más y más la partición $\mathcal{P}$ vía una secuencia de particiones $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k, \ldots$, de tal manera que $||\mathcal{P}_k|| \to 0$.

Entonces $M_i \to m_i$, $\forall i$, y se tiene

$$\lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \sum_i m_i A(Q_i) = \lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \sum_i A(\overline{R}_i) - \iint_Q \left|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\right| du\, dv = \lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \sum_i M_i A(Q_i).$$

Portanto, existe el límite de $\sum_i A(\overline{R}_i)$, y es dado por

$$A(R) = \lim_{||\mathcal{P}||\to 0} \sum_i A(\overline{R}_i) = \iint_Q \left|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\right| du\, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad \square$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Calculamos el área superficial de la esfera S^2.

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v), \quad u \in (0, 2\pi), \; v \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), r > 0.$$

$\mathbf{x}_u = (-r\cos v\sin u, r\cos v\cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v)$. Luego

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2\cos^2 v, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2.$$

y

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{r^4\cos^2 v}\, du\, dv \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^2\cos v\, du\, dv = 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv = 2\pi r^2 \sin v\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 2: Calculamos el área superficial del toro $\mathbb{T}$.

$$\mathbf{x}(u,v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big), \quad u, v \in (0, 2\pi), \; R > r > 0.$$

$\mathbf{x}_u = (-(R + r\cos v)\sin u, (R + r\cos v)\cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v)$.
Luego

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (R + r\cos v)^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = r^2.$$

y

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(R + r\cos v)^2 r^2}\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\, du\, dv = 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos v)\, dv = 2\pi r(Rv + r\sin v)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r(2\pi R) = 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$