El Plano Tangente

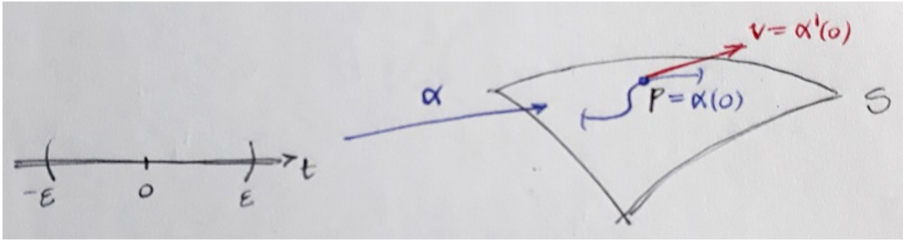
Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 15) 09.marzo.2023

Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Diremos que el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es **tangente** a S en el punto $\mathbf{p} \in S$ si existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.*



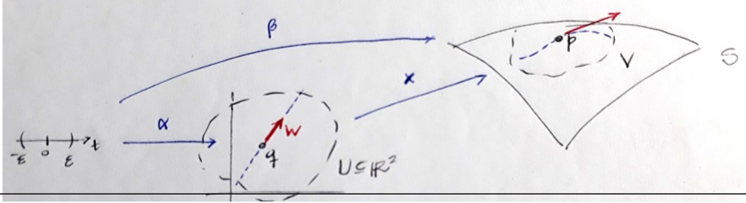
Denotamos el conjunto de todos los vectores tangentes a S en el punto $\mathbf{p}$ por $T_{\mathbf{p}}S$.

Propiedad

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq S$ *una parametrización de la superficie regular* S*, en el punto* $\mathbf{p} \in V \cap S$*, con* $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$*. Entonces, el conjunto* $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 = \operatorname{Im} D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ *coincide con el conjunto de los vectores tangentes a* S *en* $\mathbf{p}$*.*

Prueba: Sea $T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } \mathbf{p}\}$. Mostramos que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 = T_{\mathbf{p}}S$.

[$\subseteq$] Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{w}$ la recta en dirección de $\mathbf{w}$ pasando por $\mathbf{q}$, dentro del dominio U. Luego, $\alpha(0) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w}$.
Definamos la curva $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$ sobre S



El plano tangente

Entonces, $\beta(0) = \mathbf{x} \circ \alpha(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, y por la regla de la cadena tenemos

$$\beta'(0) = \tfrac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w},$$

de modo que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$. Como $\mathbf{w}$ es arbitrario, esto muestra que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbb{R}^2 \subseteq T_{\mathbf{p}}S$.

[$\supseteq$] Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$. Entonces, existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subseteq S$ tal que $\beta(0) = \mathbf{p}$ y $\beta'(0) = \mathbf{v}$.

Definamos $\alpha = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subseteq \mathbb{R}^2$. Observe que siendo $\mathbf{x}^{-1}$ y β diferenciables (en una vecidad de $\mathbf{q}$), entonces α es también diferenciable. Luego, $\alpha(0) = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.

Como $\mathbf{x} \circ \alpha = \beta$, entonces de la regla de la cadena

$$\mathbf{v} = \beta'(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w} \in D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2.$$

Siendo $\mathbf{v}$ arbitrario en $T_{\mathbf{p}}S$, esto muestra que $T_{\mathbf{p}}S \subseteq D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$. $\square$

Corolario

Para todo punto $\mathbf{p}$ de una superficie regular S, el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base para este espacio es $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$, donde

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2.$$

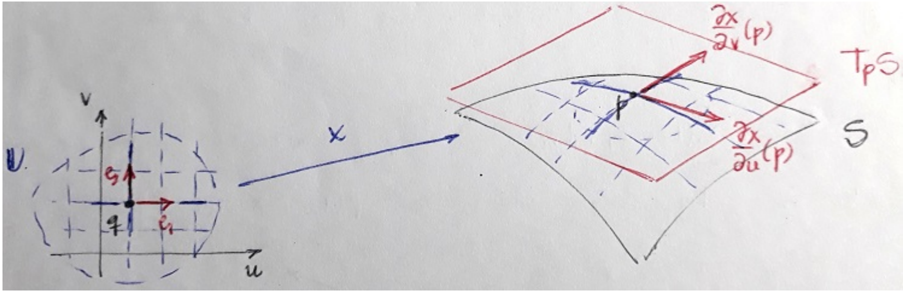
Prueba:

- Como S es superficie regular y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un mapa lineal inyectivo $\Rightarrow T_{\mathbf{p}}S = \operatorname{Im} D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un espacio vectorial y $\dim T_{\mathbf{p}}S \geq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
- Por el Teorema de la Dimensión, $\dim T_{\mathbf{p}}S = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Portanto, $\dim T_{\mathbf{p}}S = 2$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

El plano tangente

- Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \to T_{\mathbf{p}}S$ es un isomorfismo lineal, entonces $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) \right\}$ es una base para $T_{\mathbf{p}}S$. $\square$



Definición

*A $T_{\mathbf{p}}S$ se le llama el **plano tangente** a la superficie S en $\mathbf{p}$.*

Observaciones:

- La base $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\right\}$ se llama la **base canónica** o la base de $T_{\mathbf{p}}S$ asociada a la parametrización $\mathbf{x}$.
- Usualmente escribiremos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).$$

- El plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{x}$, ni de la curva α.
  (Verificarlo!)

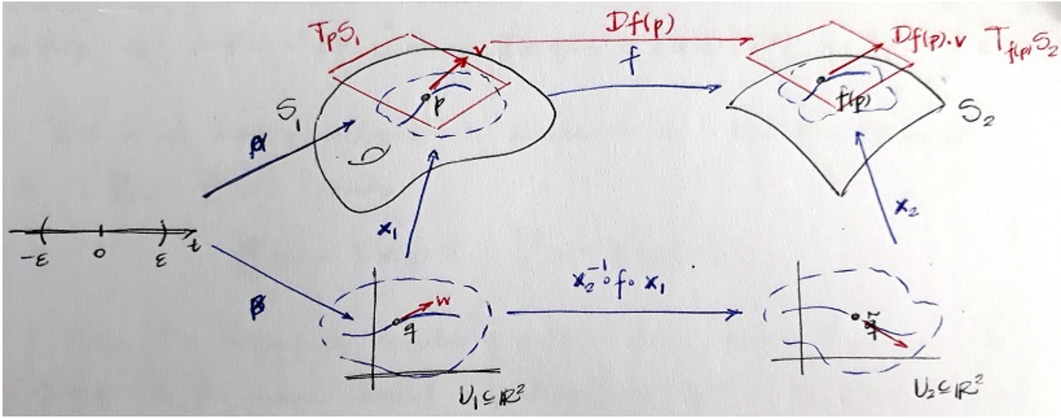
Definición

Sean S_1, S_2 superficies regulares, y sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable. Dados, $\mathbf{p} \in S_1$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1$, entonces existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subseteq S_1$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

*La **derivada** de f en $\mathbf{p}$ es la aplicación lineal $Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \to T_{f(\mathbf{p})}S_2$ dada por*

$$Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (f \circ \alpha)'(0).$$

El plano tangente



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

El plano tangente

Observaciones:

- La regla de la cadena implica que $(f \circ \alpha)'(0) = Df(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$.

- La derivada $Df(\mathbf{p})$ no depende de la curva α.

- Si $\mathbf{x} : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ es una parametrización , y $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U_1)$, definamos $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$, donde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_1$ es una curva diferenciable. Suponga que $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = D\mathbf{x}(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot (u'(0), v'(0)) \\ &= u'(0) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 + v'(0) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = u'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) + v'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ &= v_1 \, \mathbf{x}_u(\mathbf{q}) + v_2 \, \mathbf{x}_v(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

El fibrado tangente

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, con U abierto, una carta local de S. Sea $\mathbf{p} \in S$, y sea $T_\mathbf{p}S$ el plano tangente a S en $\mathbf{p}$.

Definición

*El **fibrado tangente** TS de la superficie S es la unión disjunta de los espacios tangentes $T_\mathbf{p}S$ sobre los diferentes puntos $\mathbf{p}$ de la superficie:*

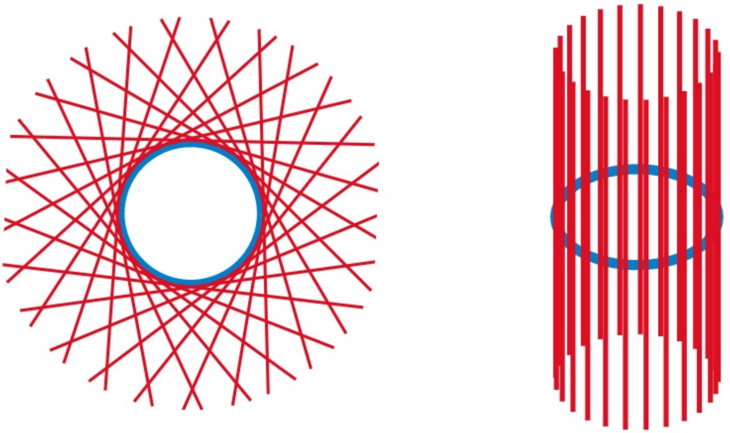
$$TS = \bigsqcup_{\mathbf{p}\in S} T_\mathbf{p}S = \dot{\bigcup_{\mathbf{p}\in S}} \left(\{\mathbf{p}\} \times T_\mathbf{p}S\right).$$

Así, un elemento de TS se puede pensar como un par ordenado $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{p}$ es un punto de S y $\mathbf{v}$ es un vector tangente a S en el punto $\mathbf{p}$. Existe una proyección

$$\pi : TS \twoheadrightarrow S,$$

definida por $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}$. Esta proyección colapsa cada espacio tangente $T_\mathbf{p}S$ en un único punto $\mathbf{p}$.

El fibrado tangente



El fibrado tangente TS^1 al círculo S^1.

El fibrado tangente

Observaciones:

- Para una curva C (variedad 1-dimensional), el fibrado tangente TC tiene dimensión 2.
- Mientras que un espacio tangente $T_{\mathbf{p}}S$ tiene dimensión 2, el fibrado tangente TS tiene dimensión 4.
- En general, para una variedad n-dimensional M, su espacio tangente $T_{\mathbf{p}}M$ tiene dimensión n, y su fibrado tangente TM tiene dimensión $2n$.
- Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, el fibrado tangente TM tiene también la estructura de una variedad diferenciable, de dimensión $2n$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

El fibrado tangente

Definición

*Un **fibrado vectorial** real consiste de un espacio topológico X (espacio base), un espacio total E, y un mapa continuo y sobreyectivo $\pi : E \to X$, tal que para todo $\mathbf{x} \in X$, la preimagen o **fibra** $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ posee la estructura de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial finito dimensional; y en donde se cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad:*

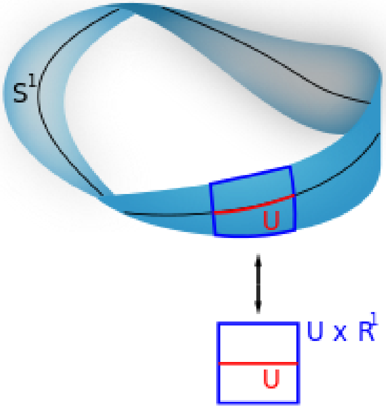
Para todo punto $\mathbf{p} \in X$, existe una vecindad $U \subseteq X$ de $\mathbf{p}$, un número natural $k \in$, y un homeomorfismo $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \to U$, tales que

- $(\pi \circ \varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$
- *el mapa* $v \to \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ *es un isomorfismo lineal entre los espacios* $\mathbb{R}^k$ *y* $\pi^{-1}(\mathbf{x})$.

U junto con el homeomorfismo φ se llama una **trivialización local** del fibrado vectorial. La trivialización local muestra que localmente el mapa π "parece" la proyección de $U \times \mathbb{R}^k$ en U.

Cada fibra $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ es un espacio vectorial real, y portanto, tiene una dimensión $k_{\mathbf{x}}$. Las trivializaciones locales muestran que la función $\mathbf{x} \to k_{\mathbf{x}}$ es localmente constante, $\Rightarrow$ es constante en cada componente conexa de X. Cuando $k_{\mathbf{x}}$ es constante, se llama el **rango** del fibrado E.

El fibrado tangente

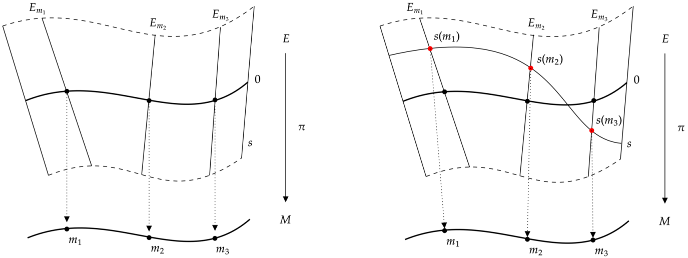


Un ejemplo de un fibrado vectorial sobre la banda de Möbius.

El fibrado tangente TM de una variedad M n-dimensional viene acompañado de un mapa de **proyección** (natural) de TM a M, dado por

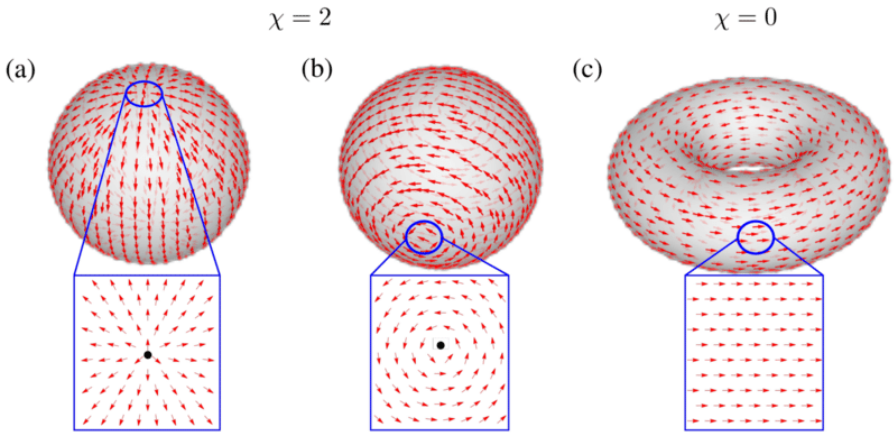
$$\pi : TM \to M, \qquad \pi(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}.$$

Sea $U \subseteq M$ un abierto. Una **sección** de π en U es cualquier función continua $s : U \to TM$ tal que $\pi \circ s =$. (Esto es, una inversa derecha continua para π).



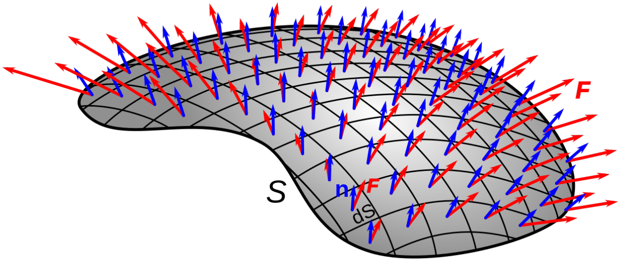
Un fibrado vectorial, y una sección para ese fibrado.

El fibrado tangente



Ejemplo de secciones tangentes (campos vectoriales tangentes) a S.

El fibrado tangente



Ejemplo de una sección normal (campo vectorial normal) a S.