Funciones diferenciables en superficies

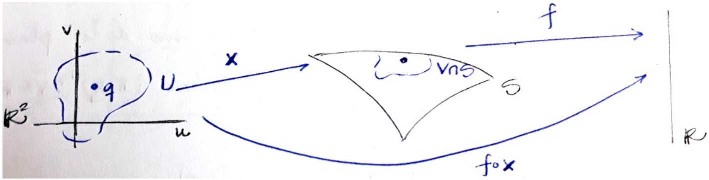
Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial (Aula 14) 07.marzo.2023

Funciones diferenciables en superficies

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Queremos definir la noción de diferenciabilidad de una función $f : S \to \mathbb{R}$.

Definición

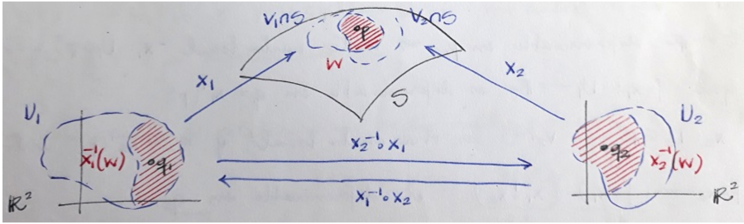
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es ***diferenciable*** *en $\mathbf{p} \in S$ si existe una vecindad parametrizada (carta local) $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{p}$ con parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$, con $\mathbf{x}(U) = V \cap S$, $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, tal que la composición $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$.*



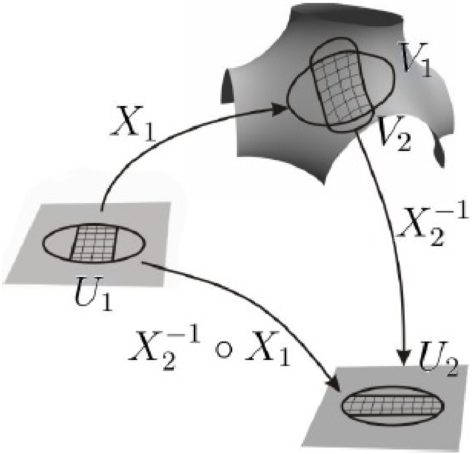
Funciones diferenciables en superficies

Obs! Esta definición tiene un problema natural. ¿Qué sucede si consideramos dos vecindades parametrizadas de $\mathbf{p}$? ¿Depende la diferenciabilidad de f de la elección de la carta local?

Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ vecindades parametrizadas de $\mathbf{p}$, con parametrizaciones $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_2$ respectivamente, y con $\mathbf{p} \in W = V_1 \cap V_2 \cap S$.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA



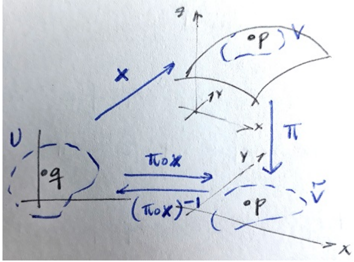
Cambio de coordenadas $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$.

Funciones diferenciables en superficies

Recordemos que si la parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$ es de la forma

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big),$$

entonces al menos uno de los números $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$ ó $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ es no nulo (condición de regularidad). Si asumimos que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, entonces la aplicación $\pi \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local, donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Funciones diferenciables en superficies

Podemos escribir $\mathbf{x} = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$, donde π y $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1}$ son funciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^d$.

Proposición (Cambios de coordenadas son difeomorfismos)

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Dados $\mathbf{p} \in S$, $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ vecindades de $\mathbf{p}$, y parametrizaciones $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_2$, con $\mathbf{p} \in W = V_1 \cap V_2 \cap S$, la aplicación

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1\big|_{\mathbf{x}_1^{-1}(W)} : \mathbf{x}_1^{-1}(W) \to \mathbf{x}_2^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo.

Prueba:
Consideremos $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección sobre uno de los planos coordenados (*e.g.* $\pi(x, y, z) = (x, y)$). Entonces, la aplicación $(\pi \circ \mathbf{x}_2)^{-1} : \pi(V_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \to U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ es diferenciable,

y podemos escribir

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ \mathbf{x}_1 = (\pi \circ \mathbf{x}_2)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_1),$$

la cual es una función diferenciable.

Lo mismo puede hacerse para mostrar que $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2 = (\pi \circ \mathbf{x}_1)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_2)$ es diferenciable. De ahí que $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$ es un difeomorfismo de $\mathbf{x}_1^{-1}(W)$ a $\mathbf{x}_2^{-1}(W)$. $\square$

Funciones diferenciables en superficies

Una consecuencia de la propiedad anterior es que la diferenciablilidad de una función $f : S \to \mathbb{R}$ en el punto $\mathbf{p}$ independe de la carta local:

- Si $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{p}$ $\Rightarrow$ existe una carta local $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_1 \cap S$ tal que $f \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{q}_1 = \mathbf{x}_1^{-1}(\mathbf{p})$.

- Si $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_2 \cap S$ es otra carta local, y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(\mathbf{p})$, entonces, si $W = V_1 \cap V_2 \cap S$

$$f \circ \mathbf{x}_2\big|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)} = (f \circ \mathbf{x}_1) \circ (\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2)\big|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)} = \underbrace{(f \circ \mathbf{x}_1)\big|_{\mathbf{x}_1^{-1}(W)}}_{dif.\ en\ \mathbf{q}_1} \circ \underbrace{(\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2)\big|_{\mathbf{x}_2^{-1}(W)}}_{dif.\ en\ \mathbf{q}_2}$$

  es composición de aplicaciones diferenciables.

- Luego, $f \circ \mathbf{x}_2$ es diferenciable en $\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_2^{-1}(\mathbf{p})$.

Funciones diferenciables en superficies

Esto nos lleva un definición alternativa de diferenciabilidad.

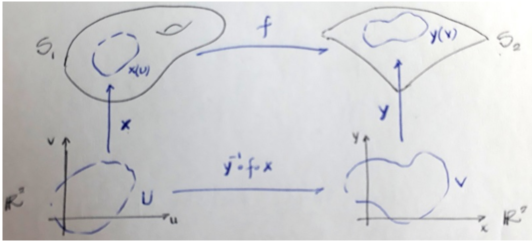
Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular. Decimos que la función $f : S \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en un abierto $V \subseteq S$, si $f \circ \mathbf{x}$ es diferenciable (como aplicación entre espacios $\mathbb{R}^d$) para cualquier parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$ de V.*

Consideramos ahora funciones entre dos superficies S_1 y S_2.

Definición

Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación entre superficies regulares S_1 y S_2. Diremos que f es ***diferenciable*** *si para cualesquiera parametrizaciones $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ y $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_2$, con $f \circ \mathbf{x}(U) \subseteq \mathbf{y}(V)$, se tiene que la aplicación $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U \to V$ es diferenciable.*



1. Restricciones:
Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $S \subseteq V$ es una superficie regular, entonces $f\big|_S : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

En general, si $F : V_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es diferenciable, y $S_1 \subseteq V_1$, $S_2 \subseteq V_2$ son superficier regulares, con $F(S_1) \subseteq S_2$, entonces $F\big|_{S_1} : S_1 \to S_2$ es diferenciable.

Ejemplo:
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Denotemos por $h : S \to \mathbb{R}$ a la función de altura relativa a un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$,

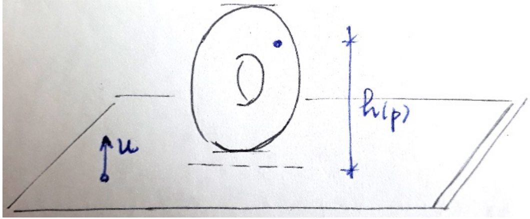
$$h(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S.$$

Ejemplos

Claramente, la aplicación $h : S \to \mathbb{R}$ es la restricción de una aplicación diferenciable

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad h(\mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{u}^T \mathbf{p},$$

y por lo tanto es diferenciable.



¿Cuál es la derivada $Dh(\mathbf{p})$? Respuesta: $Dh(\mathbf{p}) = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{p} \in S$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos

Ejemplo: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, y sea $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ un punto fijo. Denotemos por $d : S \to \mathbb{R}$ a la función de distancia al cuadrado desde cualquier punto de la superficie a este punto fijo:

$$d(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p} - \mathbf{p}_0||^2, \quad \forall \mathbf{p} \in S.$$

De nuevo, $d : S \to \mathbb{R}$ es la restricción de una aplicación diferenciable

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad d(\mathbf{p}) = ||\mathbf{p} - \mathbf{p}_0||^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

y por lo tanto es diferenciable.

¿Cuál es la derivada $Dd(\mathbf{p})$?

$$d(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T\mathbf{p} - 2\mathbf{p}_0^T\mathbf{p} + \mathbf{p}_0^T\mathbf{p}_0 \;\Rightarrow Dd(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p} - 2\mathbf{p}_0 = 2(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0).$$

Ejemplos

2. Inversa de una parametrización:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización.

Si $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U) \subseteq S$ es un punto sobre la superficie y $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es cualquier otra parametrización, entonces

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}\big|_{\mathbf{y}^{-1}(W)} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W), \quad \text{con } W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$$

es un difeomorfismo.

Luego, $\mathbf{x}^{-1}(W)$ y W son difeomorfos. En particular, la aplicación $\mathbf{x}^{-1} : W \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ es diferenciable.

Difeomorfismos

Propiedad

Sean $S_1, S_2, S_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficier regulares. Si, $f : S_1 \to S_2$ y $g : S_2 \to S_3$ son diferenciables, entonces $g \circ f : S_1 \to S_3$ son diferenciables.

Prueba: Ejercicio!

Definición

*Dos superficies regulares S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ son **difeomorfas** si existe una aplicación biyectiva diferenciable $\varphi : S_1 \to S_2$, con inversa $\varphi^{-1} : S_2 \to S_1$ también diferenciable.*

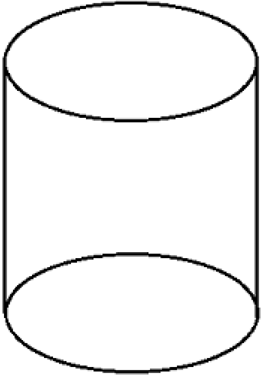
*En ese caso, la función φ se llama un **difeomorfismo** entre superficies, y escribirmos $S_1 \simeq S_2$.*

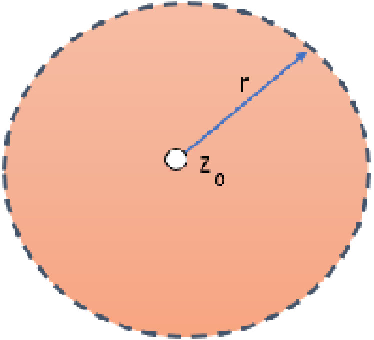
Obs! Puedes trasladar la estructura diferencial de una a la otra.
Desde el punto de vista de la geometría diferencial, dos superficies difeomorfas son indistinguibles.

Ejemplos

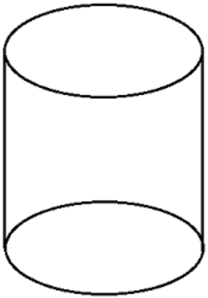
Ejemplo:

El cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es difeomorfo al plano puncturado $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

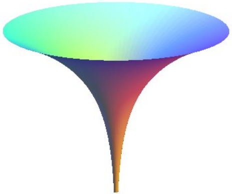




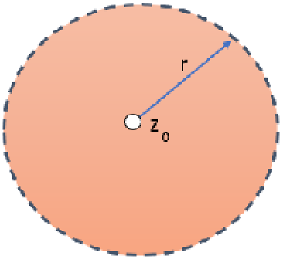
Ejemplos



$\xrightarrow{f}$



$\xrightarrow{\pi}$



Considere la composición de los mapas $f : (\cos u, \sin u, v) \to (e^v \cos u, e^v \sin u, v)$ y $\pi : (x, y, z) \to (x, y)$. Esto es

$$(\cos u, \sin u, v) \longrightarrow (e^v \cos u, e^v \sin u).$$

3. Restricciones dobles:
Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies regulares. Suponga que $S_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$, con Vun abierto, y $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable tal que $\varphi(S_1) \subseteq S_2$.
Entonces, la restricción $\varphi\big|_{S_1} : S_1 \to S_2$ es un mapa diferenciable entre superficies.

De hecho, si $\mathbf{p} \in S_1$ y $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_2$ son parametrizaciones locales de $\mathbf{p}$ y $\varphi(\mathbf{p})$, respectivamente, entonces

$$\mathbf{x}_1^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_2 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable.

Ejemplo: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ simétrica respecto del plano xy, *i.e.* $(x, y, z) \in S \Rightarrow (x, y, -z) \in S$.
El mapa $\varphi : S \to S$ dado por $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$ es diferenciable.