Superficies regulares

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 13) 21.febrero.2023

4. Gráficas de funciones

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideramos la parametrización $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(u, v, f(u, v)\big).$$

Claramente, $\mathbf{x}$ es diferenciable ya que f es diferenciable. La imagen de $\mathbf{x}$ es el grafo

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}.$$

Observe que $\mathbf{x}$ es una función biyectiva, y con inversa $\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ igual a la restricción de la proyección $\pi_{12}(x, y, z) = (x, y)$ al abierto U, de modo que $\mathbf{x}^{-1}$ también es continua, y portanto un homeomoerfismo.

Además, la derivada de **x** está dada por

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Esta es inyectiva, ya que el menor $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$.
Esto muestra que toda fráfica de una función diferenciable, en un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es una superficie regular.

Obs! Gráficas de funciones del tipo $(x, g(x,z), z)$ ó $(h(y,z), y, z)$ también son superficies regulares.

La recíproca del ejemlo anterior también vale cuando es analizada desde el punto de vista local.

Necesitamos el siguiente resultado de análisis:

Teorema (Teorema de la Función Inversa)

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación diferenciable. Si la derivada* $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *es un isomorfismo lineal (esto es,* $\det DF(\mathbf{p}) \neq 0$*) para* $\mathbf{p} \in U$*, entonces existen vecindades* $V \subseteq U$ *de* $\mathbf{p}$ *y* $W \subseteq \mathbb{R}^m$ *de* $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$*, tales que la restricción*

$$F\big|_V : V \to F(V) = W$$

es un difeomorfismo (i.e. $F\big|_V$ *y* $F^{-1}\big|_W$ *son ambas diferenciables).*

Proposición (Superficies regulares son localmente gráficas)

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Para todo punto $\mathbf{p} \in S$, existe una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{p}$ tal que $V \cap S$ es la gráfica de alguna función diferenciable, sobre alguno de los planos coordenados xy, xz ó yz.

Prueba:

Dado $\mathbf{p} \in S$, como S es superficie regular, existe una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{p}$ y una parametrización local $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$.

Sea $\mathbf{q} \in U$ tal que $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$ y consideremos el mapa

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big).$$

Superficies

Sabemos que la matriz jacobiana de **x**

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

es inyectiva y de rango 2. Así, al menos uno de los determinantes menores

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

no se anula en el punto **q**.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\mathbf{q}) \neq 0$.

Si $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces la composición $\pi \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \pi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^2$ es diferenciable (pues es composición de mapas diferenciables), y su derivada es

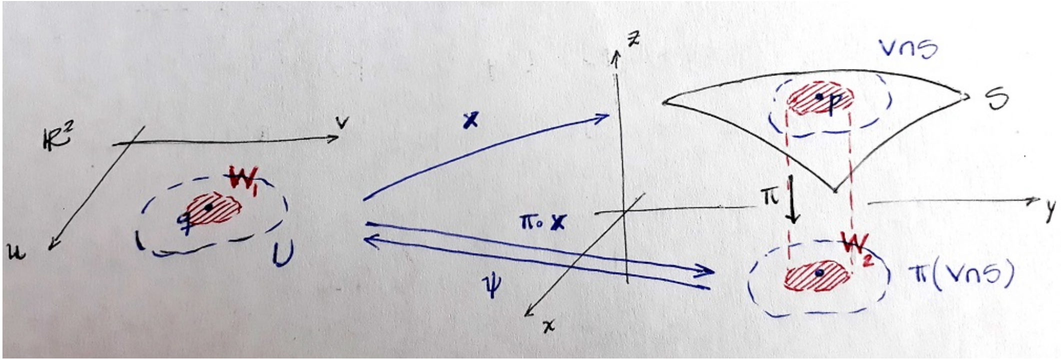
$$D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) = D\pi(\mathbf{p})\, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

En particular, $\det D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) \neq 0$, de modo que $D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q})$ es un isomorfismo lineal.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades $W_1 \subseteq U$ de $\mathbf{q}$ y $W_2 \subseteq \pi(V \cap S)$ de $\mathbf{p}$ tales que

$$(\pi \circ \mathbf{x})\big|_{W_1} : W_1 \to W_2 \quad \text{es un difeomorfismo.}$$

En particular, $(\pi \circ \mathbf{x})(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)$, y la función inversa es $\psi = (\pi \circ \mathbf{x})\big|_{W_1}^{-1} : W_2 \to W_1$ es diferenciable.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definamos la función $f : W_2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = z\big(\psi(x,y)\big)$.

f es diferenciable, por ser composición de mapas diferenciables. Además,

$$\mathbf{x}(W_1) = \big\{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 : \ (u,v) \in W_1\big\}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
G_f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x,y), \ (x,y) = (\pi \circ \mathbf{x})(u,v) \in W_2, \ (u,v) \in W_1\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = x(u,v), \ y = y(u,v), \ z = z\big(\psi(x,y)\big) = z(u,v), \ (u,v) \in W_1\} \\
&= \big\{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in W_1\big\} \\
&= \mathbf{x}(W_1).
\end{aligned}$$

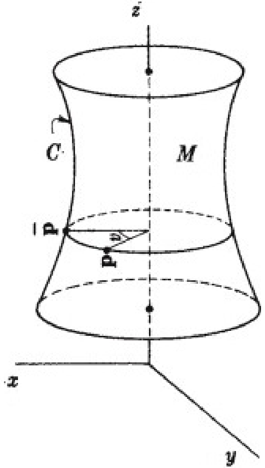
Portanto, $V \cap S \supseteq W_2 = \mathbf{x}(W_1)$ es el grafo de la función f.

5. Superficies de revolución:

Sea $C : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana inyectiva, y sea L un eje en el plano que no corta a la curva C, (*e.g.* xz el plano de C y Oz el eje).

Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar la curva C en torno del eje Oz.

Sea $x = f(v), z = g(v)$, con $a \leq v \leq b$ una parametrización de la curva C, con $f(v) > 0$; y denotemos por u el ángulo de rotación en torno del eje Oz.



Superficies de revolución

La aplicación

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\big),$$

definida en el abierto $U = (0, 2\pi) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2$ proporciona una parametrización para S:

- $\mathbf{x}$ es diferenciable (desde que f y g son diferenciables).
- Como $(f(v), g(v))$ parametriza C, dados z y $r^2 = x^2 + y^2 = (f(v))^2$ entonces $z = g(v)$ y $r = f(v)$, están únicamente determinados, $\Rightarrow$, $x = r\cos u$, $y = r\sin u$ también $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ es inyectiva y continua.
- Para mostrar que $\mathbf{x}^{-1}$ es continua en función de (x, y, z), tome $u \neq \pi$. Como $f(v) \neq 0$, entonces
$$v = C^{-1}(f(v), g(v)) = C^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, z),$$
es la parametrización inversa de C, la cual es continua.

Superficies de revolución

- (aquí se está usando el hecho que toda función continua e inyectiva definida en un compacto tiene inversa continua).

- Por otro lado,

$$\tan\tfrac{u}{2} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{y/f(v)}{1+x/f(v)} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

para $u \neq \pi$. En ese caso,

$$u = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad u \neq \pi.$$

En caso $u \in (\pi-\epsilon, \pi+\epsilon)$, se tiene $u = 2\arctan\dfrac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Superficies de revolución

- Así, **x** es un homeomorfismo.

- Finalmente,

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} -f(v)\sin u & f'(v)\cos u \\ f(c)\cos u & f'(v)\sin u \\ 0 & g'(v) \end{pmatrix}.$$

  Tenemos los determinantes menores

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(v)f'(v), \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = -f(v)g'(v)\sin u, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(v)g'(v)\cos u.$$

  Como C es una curva regular, entonces $C'(v) = (f'(v), g'(v)) \neq 0 \;\Rightarrow\; D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es inyectiva.

Esto muestra que S, la superficie de revolución, es una superficie regular.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplo: La esfera S^2.

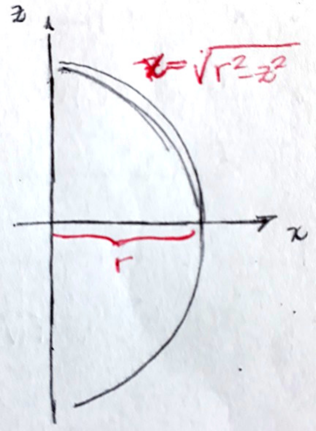
Consideremos la curva $C : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$C(v) = (r \sin v, r \cos v), \quad v \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \; r > 0.$$

La curva es regular e inyectiva. Siguiendo el proceso descrito anteriormente, podemos girar la curva C en torno al eje Oz y construir una superficie de revolución dada por

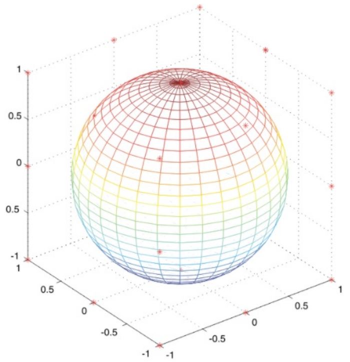
$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v),$$

$u \in (0, 2\pi)$, $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Ejemplos

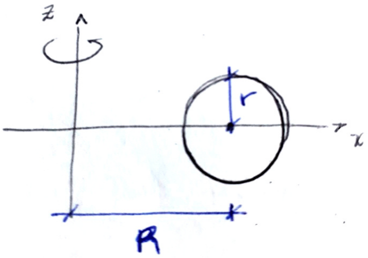
Obtenemos la típica parametrización en coordenadas esféricas. -0.3cm



Meridianos = curvas idénticas a C al variar el parámetro u.
Paralelos = círculos que se obtienen al fijar el parámetro v.

Ejemplos

Ejemplo: El toro bidimensional $\mathbb{T}^2$.



Consideramos la curva $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$C(v) = (R, 0) + (r\cos v, r\sin v), \quad v \in (0, 2\pi),$$

$R > r > 0$.

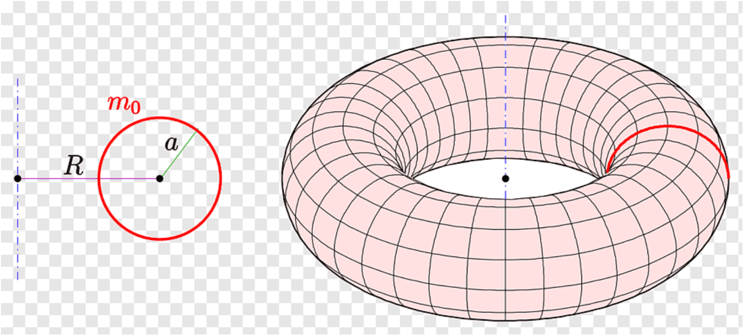
La curva es regular e inyectiva. Construimos la superficie de revolución girando C en torno al eje Oz y obtenemos la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big),$$

$u, v \in (0, 2\pi)$.

Ejemplos

Esta es la parametrización usual del toro bidimensional.



Observe que, topológicamente, el toro es homeomorfo a $\mathbb{T} \simeq S^1 \times S^1$.

Definición

*Dada una función diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U abierto, decimos que $\mathbf{p} \in U$ es un **punto crítico** de F si la derivada $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no es sobreyectiva.*
*La imagen $F(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico se llama un **valor crítico** de F. Un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ que no es un valor crítico se llama un **valor regular** de F.*

Obs: En el caso que $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in U$ es un punto crítico de F si $DF(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (la terminología coincide con la de cálculo).

En este caso, como

$$DF(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

decir que $DF(\mathbf{p})$ no es sobreyectiva implica que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 0$, $\forall i$.

Valores regulares

Portanto, para $\mathbf{q} \in F(U)$, decir que $\mathbf{q}$ es un valor regular de F es equivalente a decir que las derivadas

$$\tfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \ldots, \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}),$$

no se anulan simultáneamente en cualquier punto de la imagen inversa

$$F^{-1}(\mathbf{q}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n : \; F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{q}\}.$$

En el caso de funciones en $\mathbb{R}^3$, $f : \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, basta verificar que las derivadas

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \tfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),$$

nunca se anulan en $\mathbf{p} \in f^{-1}(\mathbf{q})$.

Proposición

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $a \in f(U)$ un valor regular de f. Entonces, $S = f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

Prueba:

Sea $\mathbf{p} \in f^{-1}(a)$. Entonces, $Df(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$.

Sin pérdida, podemos asumir que $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$.

Definimos la función $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = \big(x, y, f(x, y, z)\big).$$

Claramente, F es diferenciable (pues f lo es), y su derivada está dada por

Valores regulares

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Luego, $\det Df(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$. Por lo tanto, $DF(\mathbf{p})$ es un isomorfismo.

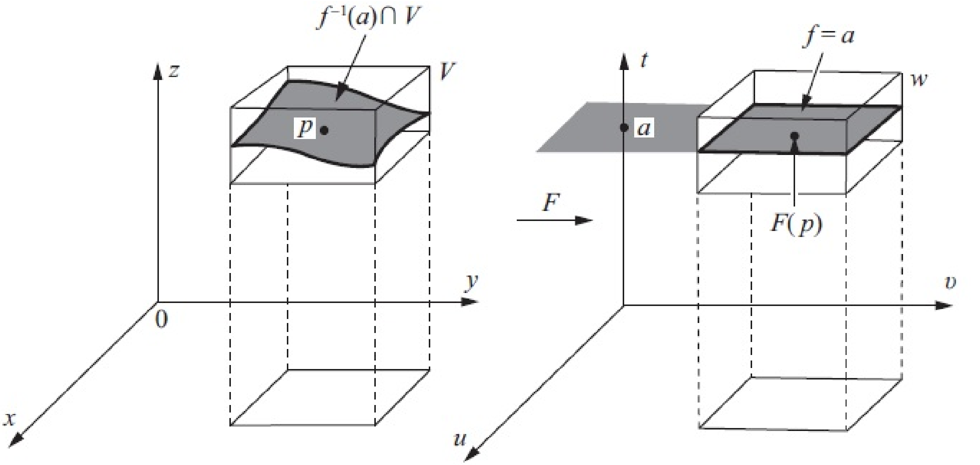
Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades $V \subseteq U$ de $\mathbf{p}$ y $W \subseteq F(U)$ de $F(\mathbf{p})$, tales que $F\big|_V : V \to W = F(V)$ es un difeomorfismo.

La función inversa $F^{-1} : W \to V$ tiene coordenadas

$$F^{-1}(u,v,w) = \big(u, v, g(u,v,w)\big).$$

Esto es $x = u$, $y = v$ y $z = g(u,v,w)$, para todo $(u,v,w) \in W$.

Valores regulares



Valores regulares

De nuevo denotemos por $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Definamos la función $h : \pi(V) \to \mathbb{R}$ por

$$h(x, y) = z = g(u, v, w) = g(x, y, a) = z\big(F^{-1}(x, y, a)\big),$$

donde $F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f^{-1}(a))$.

Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, w) : \; w = a\}$, concluímos que
$G_h = \{(x, y, g(x, y, a))\} = f^{-1}(a) \cap V$.

Así, $f^{-1}(a) \cap V$ es una vecindad coordenada de **p**, y como $f^{-1}(a)$ puede cubrirse por cartas locales, esto muestra que $S^{-1}(a)$ es superficie regular.

Ejemplos

<u>1. Esfera</u>:
La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

Considere la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
Observe que 0 es un valor regular de f.

<u>2. Toro $\mathbb{T}^2$</u>:
El toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ satisface la ecuación

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2.$$

Haciendo $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - r^2$, se puede observar que 0 es un valor regular de f.