Superficies regulares

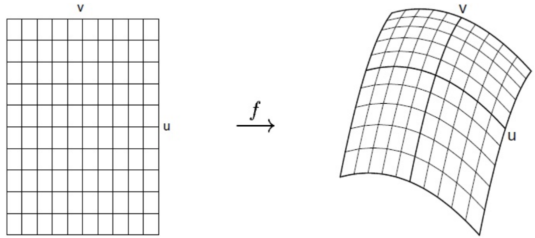
Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 12) 16.febrero.2023

Superficies

Pasar de curvas a superficies, en principio sólo reemplazamos el parámetro de la curva por dos parámetros independientes (superficie parametrizada).

Para un desarrollo adecuado de la teoría requerimos que la superficie no sólo está dada por un mapa diferenciable en dos variables, sino que además admite una linealización geométrica (hay plano tangente en cada punto).



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

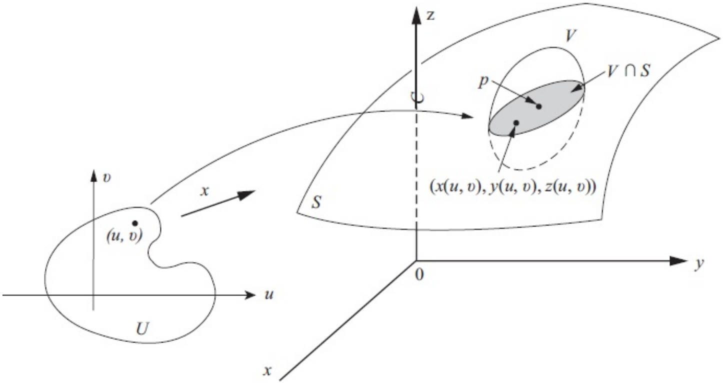
*Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{p}$ y una aplicación diferenciable (de clase C^k) $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$, definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ tal que*

- *$\mathbf{x}$ es diferenciable (de clase C^k), esto es, si*

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big),$$

  entonces las funciones componentes x, y, z son todas diferenciables de clase C^k en U.
- *$\mathbf{x}$ es un homeomorfismo, esto es, $\mathbf{x}$ es continua con inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ continua.*
- *(Condición de regularidad) Para todo $\mathbf{q} \in U$, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.*

La aplicación **x** se llama una **parametrización** (o un *sistema de coordenadas locales*, o una *carta local*) en una vecindad de **p**. La vecindad $V \cap S$ de **p** se llama una **vecindad coordenada**.



Expresamos la aplicación lineal $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, en términos de las bases canónicas $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathbf{q} = (u_0, v_0) \in U$. El vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ es tangente a la curva $\alpha : u \to (u, v_0)$ que pasa por $\mathbf{q}$. Similarmente el vector $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ es tangente a la curva $\beta : v \to (u_0, v)$ por $\mathbf{q}$.

La imagen de la curva α bajo la parametrización $\mathbf{x}$ está sobre la superficie S:

$$\mathbf{x} \circ \alpha : u \to \big(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)\big).$$

y tiene en $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ el vector tangente

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big).$$

De hecho, de la definición de derivada, se tiene

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1 = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u.$$

De la misma forma, la imagen de la curva β bajo la parametrización $\mathbf{x}$ está sobre la superficie S:

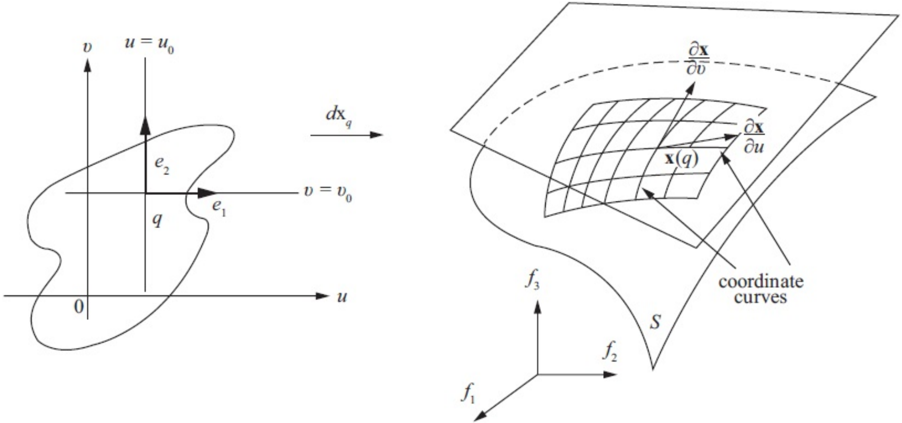
$$\mathbf{x}\circ\beta : v \to \big(x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v)\big).$$

y tiene en $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ el vector tangente

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big).$$

y

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2 = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v.$$



La base canónica del plano tangente a S el punto $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$.

Como $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que en todo punto $\mathbf{q} \in U$, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es una aplicación lineal, y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

A partir de lo anterior, tenemos que

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) & \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

pues

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Recordemos la definición de superficie regular.
La condición de regularidad puede expresarse exigiendo que los dos vectores

$$\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_v(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q})$$

sean linealmente independientes en todo punto $\mathbf{q} \in U$.

Equivalentemente, $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) \times \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}$.

Otra forma de ver esto último es que alguno de los determinantes menores de la matriz $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ no se anule:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

1. El plano $\mathbb{R}^2$:

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes. Considere el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{\mathbf{p} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} : \; s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmamos que S es superficie regular. Observe que en este caso, tenemos una parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

En coordenadas, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(p_1 + ua_1 + vb_1, p_2 + ua_2 + vb_2, p_3 + ua_3 + vb_3\big).$$

Ejemplos

Claramente $\mathbf{x}$ es diferenciable, $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ a S y

$$D\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \forall (u,v).$$

es inyectiva (¿por qué?).

Ejemplos

2. Abiertos de $\mathbb{R}^2$:
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Entonces, U es una superficie regular.

En este caso, tenemos la parametrización $\mathbf{x} : U \to U \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0).$$

La función identidad, o más bien, la inclusión canónica de U en $\mathbb{R}^3$.
En particular, $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo, $\mathbf{x}$ es diferenciable, y la derivada es

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (u, v) \in U$$

es inyectiva.

3. La esfera S^2:

Vamos a mostrar que la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular.

Verificamos primero que el mapa $\mathbf{x}_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \big(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\big), \quad (u, v) \in \mathbb{D}$$

es una parametrización local del S^2, con $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Observemos que $\mathbf{x}_1(\mathbb{D}) = S^2 \cap \{z > 0\}$ es el hemisferio superior de la esfera.

Como $x^2 + y^2 < 1$, la función $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tiene derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}.$$

continuas, y de clase C^∞. Luego, $\mathbf{x}_1$ es diferenciable.

Para ver que $\mathbf{x}_1$ es un homeomorfismo, observe que $\mathbf{x}_1$ es biyectiva y que la inversa $\mathbf{x}_1^{-1} : S^2 \cap \{z > 0\} \to \mathbb{D}$ es la restricción de la proyección $\pi_{12}(x, y, z) = (x, y)$ al conjunto $\mathbf{x}_1(\mathbb{D})$. Luego, $\mathbf{x}_1^{-1}$ es continua y $\mathbf{x}_1$ es homeomorfismo.

Finalmente, la derivada

$$D\mathbf{x}_1(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}, \quad \text{con menor } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1,$$

es inyectiva.

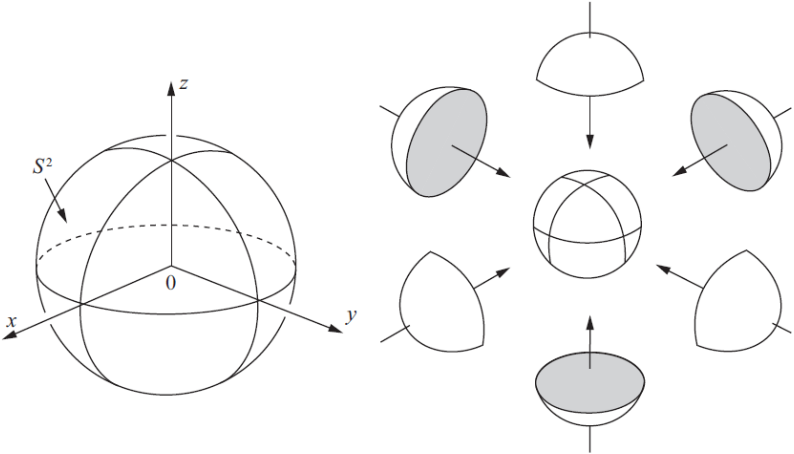
Ejemplos

Cubrimos ahora la esfera S^2 con parametrizaciones similares:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(u,v) &= (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_3(u,v) &= (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_4(u,v) &= (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_5(u,v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D} \\
\mathbf{x}_6(u,v) &= (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Que, junto con $\mathbf{x}_1$, cubren toda la esfera S^2. De ahí, S^2 es una superficire regular, (cubierta por seis cartas locales).

Ejemplos



Una parametrización de S^2 por cartas locales.