Curvas en el espacio de Minkowski

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 11) 09.febrero.2023

El espacio de Minkowski

Hasta ahora hemos considerado los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$ como nuestro ambiente "estándar" de trabajo. El producto interno de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

implica, entre otras cosas, que el tangente $\mathbf{t}(s)$ de una curva regular $\alpha(s)$ nunca se anula. Considerar espacios más generales.

Por ejemplo, en teoría de la relatividad especial, se trabaja con un espacio de $3+1$ dimensiones, en donde el tiempo es visto como una de estas dimensiones (3 dim. espaciones, 1 temporal).

Por simplicidad, trabajaremos con una versión reducida de $2+1$ dim.

Definición

El espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ *usual, equipado con el producto interno*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

es llamado el ***espacio de Minkowski*** *o* ***espacio de Lorentz*** $\mathbb{R}^3_1$.

El caso general $\mathbb{R}^n_1$ se define de forma análoga como $\mathbb{R}^n$ con

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_iy_i,$$

y más general aún $\mathbb{R}^n_k$, $1 \leq k \leq n$, se define como $\mathbb{R}^n$ con el producto

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\sum_{i=1}^{k} x_iy_i + \sum_{j=k+1}^{n} x_jy_j.$$

El espacio de Minkowski

Recordemos que en los espacios euclideanos, la existencia de un producto interno $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ induce una *norma* mediante

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle.$$

En consecuencia, todo vector tiene norma ≥ 0.

En los espacios $\mathbb{R}^n$, la primer diferencia es que el producto interno $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ da origen a una *pseudo-norma*:

- pueden existir vectores con norma negativa. (*e.g.* en $\mathbb{R}^3_1$ el vector $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ tiene norma $|\mathbf{x}|^2 = -1$.
- En ciertas áreas de física o matemática, los vectores con norma negativa se llaman fantasmas (*ghosts*).
- Otra diferencia es que $|\mathbf{x}| = 0$ no necesariamente implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dependiendo del contexto físico, los vectores con norma cero o norma negativa tienen interpretaciones específicas.

El espacio de Minkowski

En los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$, típicamente cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ da origen a un producto interno, via una forma cuadrática:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Para que este producto interno induzca una norma, es necesario que A sea simétrica y semi-definida positiva (todos los autovalores ≥ 0).

Por ejemplo, el producto interno usual en $\mathbb{R}^4$ está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

El espacio de Minkowski

En $\mathbb{R}^4_1$, el producto interno está dado por

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

(esta matriz no es semi-definida positiva, tiene un autovalor -1).

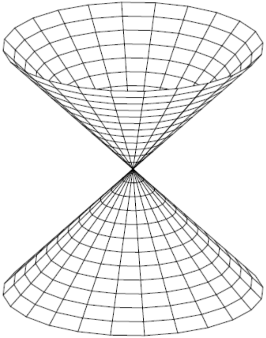
Definición

En el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^2_1$, un vector $\mathbf{x}$ se llama

- ***de tipo espacial** (space-like), si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$;*
- ***de tipo temporal** (time-like), si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} < 0$;*
- ***de tipo luz** (light-like) o **isotrópico**, si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$, pero $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*

El espacio de Minkowski

El conjunto de todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_1$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tales que $|\mathbf{x}| = 0$, se llama el **cono de luz**.



El cono de luz en $\mathbb{R}^3_1$.

Como $\mathbb{R}^3_1$ y $\mathbb{R}^3$ se comportan similares, podemos hacer inmersiones de curvas en $\mathbb{R}^3$ a curvas en $\mathbb{R}^3_1$.

Definición

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3_1$ se llama

- ***espacial** (space-like), si $|\alpha'(t)| > 0$, $\forall t \in I$;*
- ***temporal** (time-like), si $|\alpha'(t)| < 0$, $\forall t \in I$;*
- ***de luz** (light-like) o **isotrópica** o **curva nula** si $|\alpha'(t)| = 0$, $\forall t \in I$.*

Ejemplos:

- La hipérbola $x_1^2 = x_2^2 + 1$, $x_3 = 0$, se parametriza como $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$. Luego, $c'(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$, y $|c'(t)| = 1$, $\forall t \Rightarrow c$ es una curva espacial.

Ejemplos:

- La hipérbola $x_1^2 = x_2^2 - 1$, $x_3 = 0$, se parametriza como $c(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$. Luego, $c'(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$, y $|c'(t)| = -1$, $\forall t \Rightarrow c$ es una curva temporal.

- La recta $c(t) = (t, t, 0)$. Luego, $c'(t) = (1, 1, 0)$ y $|c'(t)| = 0$, $\forall t \Rightarrow c$ es una curva isotrópica. Con exceptión del origen, $c(t)$ cae completamente dentro del cono de luz.

Ecuaciones de Frenet

Para obtener ecuaciones del tipo Frenet en el espacio $\mathbb{R}^3_1$, observemos que en $\mathbb{R}^3$

- es posible definir un producto vectorial (modificado) de modo que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \forall\, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3_1.$$

De la misma forma, es posible definir un referencial o triedro móvil, de la siguiente forma:

- Para dos vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, con las propiedades

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \pm 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \pm 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

  un tercer vector está definido por la ecuación $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, y estos tres vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3_1$.

- Si denotamos $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \epsilon$ y $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \eta$, entonces $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -\epsilon\eta$.

Ecuaciones de Frenet

- Luego, todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_1$ admite una descomposición de la forma

$$\mathbf{x} = \epsilon(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 - \epsilon\eta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

Resumimos esto en el siguiente resultado

Teorema (Ecuaciones de Frenet en el espacio de Minkowski)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3_1$ *una curva espacial o temporal, parametrizada por longitud de arco, y que satisface* $|\alpha''(s)| \neq 0$*, para todo* $s \in I$.

Entonces, esta curva induce un triedro de Frenet $\mathbf{e}_1(s) = \alpha'(s)$, $\mathbf{e}_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|^2}$ *y* $\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$*. En ese caso, se satisfacen las ecuaciones de Frenet*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'(s) \\ \mathbf{e}_2'(s) \\ \mathbf{e}_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s)\eta(s) & 0 \\ -\kappa(s)\epsilon(s) & 0 & -\tau(s)\epsilon(s)\eta(s) \\ 0 & -\tau(s)\eta(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones de Frenet

Las cantidades

$$\kappa(s) = \mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_2(s), \quad \tau(s) = \mathbf{e}_2'(s) \cdot \mathbf{e}_3(s),$$

se llaman la *curvatura* y la *torsión* de α.

Prueba:
Al igual que en la prueba para el caso de $\mathbb{R}^3$, basta calcular las componentes de

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1'(s) &= \alpha''(s) = \eta(s)\langle\alpha''(s), \mathbf{e}_2(s)\rangle\mathbf{e}_2(s) = \eta(s)\kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \\
\langle\mathbf{e}_2'(s), \mathbf{e}_1(s)\rangle &= -\langle\mathbf{e}_1'(s), \mathbf{e}_2(s)\rangle = -\kappa(s), \\
\langle\mathbf{e}_3'(s), \mathbf{e}_2(s)\rangle &= -\langle\mathbf{e}_2'(s), \mathbf{e}_3(s)\rangle = -\tau(s).
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Frenet

Obs! En el espacio pseudo-euclideano $\mathbb{R}^n_k$, tenemos el producto interno

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} x_j y_j.$$

y la curva $\alpha(s)$, parametrizada por longitud de arco, define un sistema de Frenet $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$, con $\epsilon_i = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i$, que satisface

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix}}_{F'(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1\epsilon_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\kappa_1\epsilon_1 & 0 & \kappa_2\epsilon_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2\epsilon_2 & 0 & \kappa_3\epsilon_4 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2}\epsilon_{n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2}\epsilon_{n-2} & \ldots & \kappa_{n-1}\epsilon_n \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1}\epsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{K(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}}_{F(s)}, \quad \forall s.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ecuaciones de Frenet

La prueba es similar al caso del Teorema de existencia y unicidad de curvas en el caso euclideano $\mathbb{R}^n$.

El único cambio es la modificación en la representación de un vector en términos de la base ortonormal dada por el referencial de Frenet:

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j, \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$