

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 06) 26.ENERO.2023

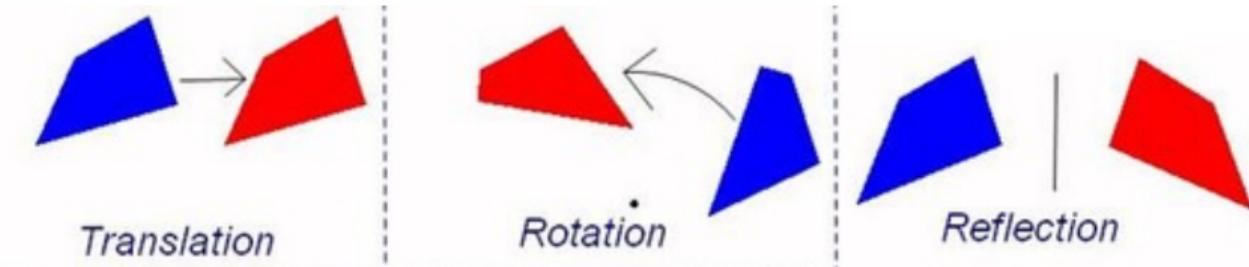
Transformaciones rígidas

Definición

Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distancia en \mathbb{R}^n (e.g. la distancia euclídeana). Una **transformación rígida (movimiento rígido o euclídeano)** en \mathbb{R}^n es una transformación $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

¿Qué tipos de transformaciones rígidas hay?



Transformaciones rígidas

- Traslaciones:

Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define una única traslación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$. Representamos el grupo de traslaciones por \mathbb{R}^n .

- Rotaciones y Reflexiones: Se representan por una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad de *isometría*

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

En consecuencia, A es una *matriz ortogonal* real (sus columnas son una base ortonormal de \mathbb{R}^n). El grupo de matrices ortogonales se llama el **grupo ortogonal** $O(n)$.

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\Rightarrow A^T A = I \Rightarrow A^{-1} = A^T, \\ &\Rightarrow \det(A)^2 = \det(A^T) \det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1 \\ &\Rightarrow \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.
- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1 . Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

Propiedad

Una transformación rígida en \mathbb{R}^n es de la forma

$$M(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{t}, \text{ donde } A \in O(n), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

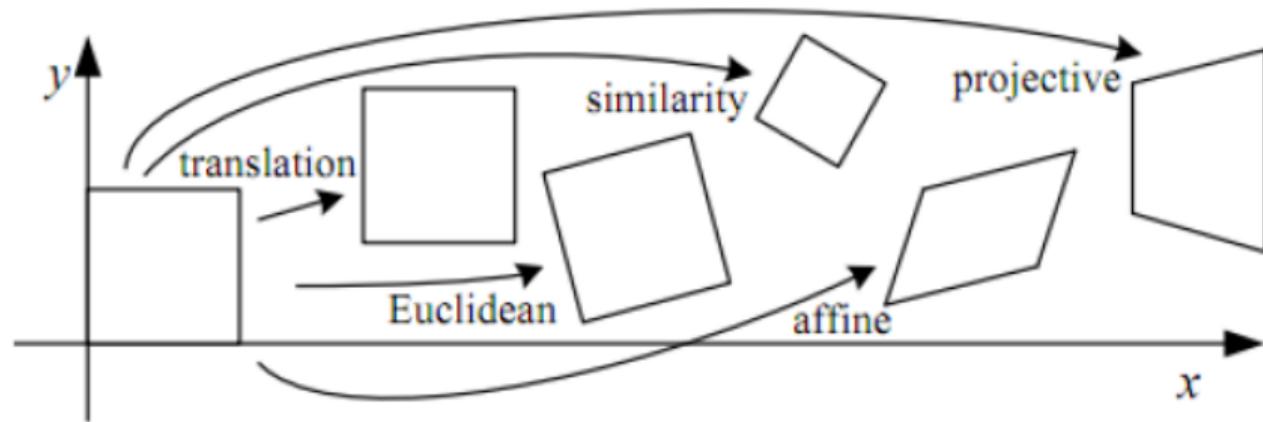
Prueba: Traslaciones, rotaciones y reflexiones, son de la forma $\mathbf{Ax} + \mathbf{t}$. La composición es de esa forma:

$$A_2(A_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = A_2A_1\mathbf{x} + (A_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = \mathbf{Ax} + \mathbf{t}.$$

Transformaciones rígidas

Definición

El grupo de transformaciones rígidas en \mathbb{R} se llama el **grupo euclideo** $E(n)$.



Transformaciones rígidas

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

Prueba:

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Entonces $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$. Luego

$$\beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s).$$

De ahí

$$\begin{aligned} \ell_{\beta}(s) &= \int_{s_0}^s |\beta'(u)| \, du = \int_{s_0}^s |A\alpha'(u)| \, du = \int_{s_0}^s \langle A\alpha'(u), A\alpha'(u) \rangle^{1/2} \, du \\ &= \int_{s_0}^s \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle^{1/2} \, du = \int_{s_0}^s |\alpha'(u)| \, du = \ell_{\alpha}(s), \quad \forall s. \end{aligned}$$

Esto muestra que ℓ es invariante bajo movimientos rígidos. \square

Transformaciones rígidas

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$. Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$. En particular,

$$\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s),$$

$$\mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{n}_\alpha(s) \quad (\text{ya que } \beta''(s) = A\alpha''(s)),$$

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{t}_\beta(s) \times \mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s) \times A\mathbf{n}_\alpha(s) = A(\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)) = A\mathbf{b}_\alpha(s).$$

Luego A lleva el triedro de Frenet de α , en el triedro de Frenet de β .

Transformaciones rígidas

Además,

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta}(\mathbf{s}) &= \langle \beta''(\mathbf{s}), \mathbf{n}_{\beta}(\mathbf{s}) \rangle = \langle A\alpha''(\mathbf{s}), A\mathbf{n}_{\alpha}(\mathbf{s}) \rangle = \langle \alpha''(\mathbf{s}), \mathbf{n}_{\alpha}(\mathbf{s}) \rangle \\ &= \kappa_{\alpha}(\mathbf{s}), \quad \forall \mathbf{s};\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_{\beta}(\mathbf{s}) &= \langle \mathbf{b}'_{\beta}(\mathbf{s}), \mathbf{n}_{\beta}(\mathbf{s}) \rangle = \langle A\mathbf{b}'_{\alpha}(\mathbf{s}), A\mathbf{n}_{\alpha}(\mathbf{s}) \rangle = \langle \mathbf{b}'_{\alpha}(\mathbf{s}), \mathbf{n}_{\alpha}(\mathbf{s}) \rangle \\ &= \tau_{\alpha}(\mathbf{s}), \quad \forall \mathbf{s}.\end{aligned}$$

De ahí que κ y τ son invariantes bajo movimientos rígidos. \square