

# **TEORÍA LOCAL DE CURVAS: FORMA CANÓNICA LOCAL**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 05) 24.ENERO.2023

# El triedro móvil

Al cambiar la orientación de  $\alpha$ , el vector tangente  $\mathbf{t}(s)$  cambia de dirección, el vector normal  $\mathbf{n}(s)$  no cambia  $\Rightarrow \mathbf{b}(s)$  cambia de dirección. Así, la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$  son invariantes al cambiar orientación.

Para cada  $s \in I$  hemos definido tres vectores unitarios  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$  y  $\mathbf{b}(s)$ . Las derivadas de estos vectores satisfacen  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ . Además  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  es una base ortonormal en cada punto  $\alpha(s) \Rightarrow \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$  y

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'(s) &= (\mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s))' = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\ &= [\tau(s)\mathbf{n}(s)] \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times [\kappa(s)\mathbf{n}(s)] \\ &= \tau(s)[\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] + \kappa(s)[\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s)] \\ &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).\end{aligned}$$

# El triedro móvil

Obtenemos entonces el sistema de EDOs

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \forall s \in I. \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s),\end{aligned}$$

que en forma matricial, se escribe como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}, \quad \forall s \in I.$$

Estas EDO se llaman las **fórmulas de Frenet**.

# El triedro móvil

## Definición

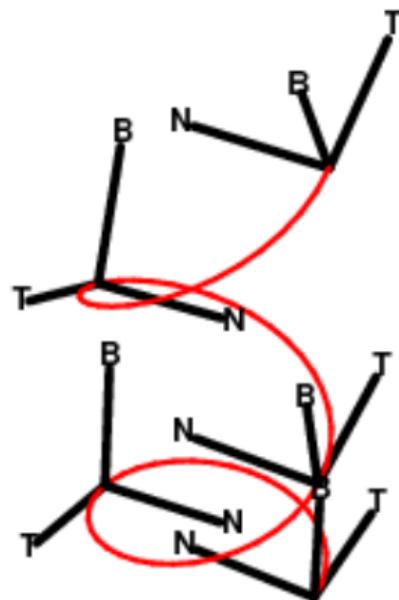
El sistema  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  se llama el **triedro de Frenet-Serret, triedro móvil o referencial móvil**.

## Definición

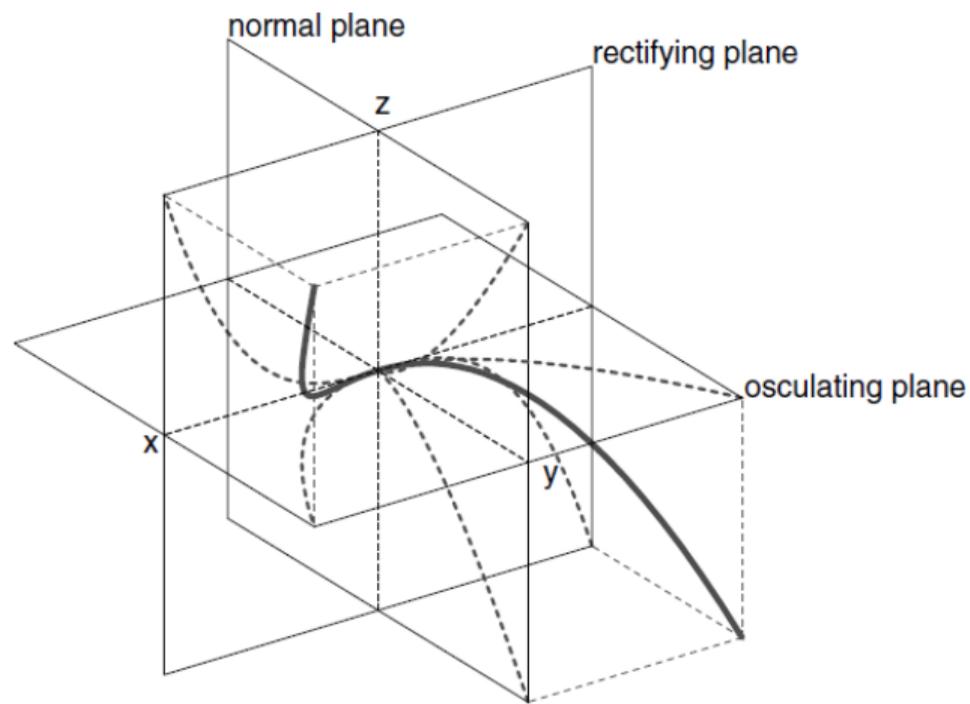
Al plano  $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ , pasando por  $\alpha(s)$ , se le llama **plano rectificante**, mientras que al plano  $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$  se le llama el **plano normal**.

## Definición

La recta generada por  $\mathbf{t}(s)$  es la **recta tangente**, la recta generada por  $\mathbf{n}(s)$  es la **recta normal principal**, y la recta generada por  $\mathbf{b}(s)$  es la **recta binormal**.



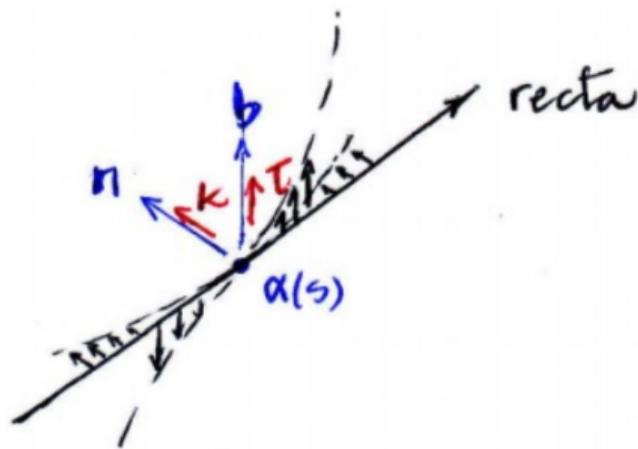
# El triedro móvil



# El triedro móvil

**Obs.** Usualmente, una curva  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que es de clase  $C^3$ , regular, y tal que  $\kappa(s)$  y  $\tau(s)$  nunca se anulan, se llama una **curva de Frenet**.

Físicamente, una curva de Frenet puede pensarse como la deformación de una recta cuando esta es enrollada por la acción de  $\kappa(s)$  y torcida por la acción de  $\tau(s)$ .



# Forma canónica local

El triedro de Frenet proporciona un marco de referencia apropiado para estudiar curvas en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva de Frenet (clase  $C^3$  y regular), de modo que  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  siempre es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Consideramos la expansión de Taylor de  $\alpha(s)$  alrededor de  $s = 0$

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + o(s^3).$$

( $o(s^3)$  es un término que satisface  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s^3)}{s^3} = 0$ ).

Como  $\alpha'(0) = \mathbf{t}(0) = \mathbf{t}$ ,  $\alpha''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0) = \kappa\mathbf{n}$  y

$$\alpha'''(0) = (\kappa(s)\mathbf{n}(s))' \Big|_{s=0} = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b},$$

# Forma canónica local

Al sustituir en el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha(0) + \mathbf{s}\mathbf{t} + \frac{s^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{s^3}{6}(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b}) + o(s^3) \\ &= \alpha(0) + \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa s^2}{2} - \frac{\kappa' s^3}{6}\right)\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa\tau s^3}{6}\right)\mathbf{b} + o(s^3).\end{aligned}$$

Tomamos ahora un sistema de coordenada  $Oxyz$ , de modo que el origen  $O$  coincide con  $\alpha(0)$ ,  $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ .

Entonces, la curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$  es dada por:

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3 + o(s^3)_x, \\ y(s) &= \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3 + o(s^3)_y, \\ z(s) &= -\frac{1}{6}\kappa\tau s^3 + o(s^3)_z.\end{aligned}$$

# Forma canónica local

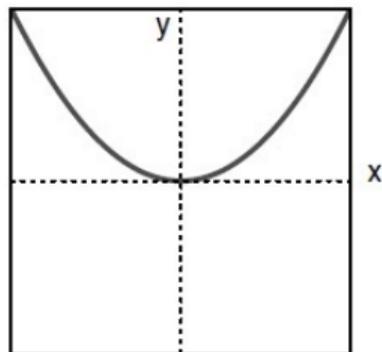
Cuando  $s$  es muy pequeño, podemos aproximar la forma de  $\alpha(s)$  por

$$x(s) \approx s,$$

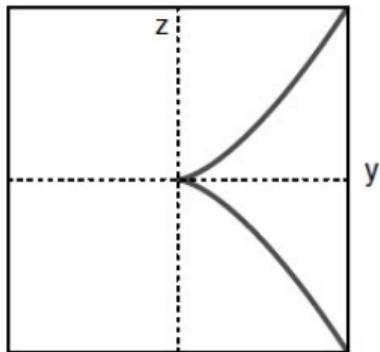
$$y(s) \approx \frac{1}{2}\kappa s^2,$$

$$z(s) \approx -\frac{1}{6}\kappa\tau s^3.$$

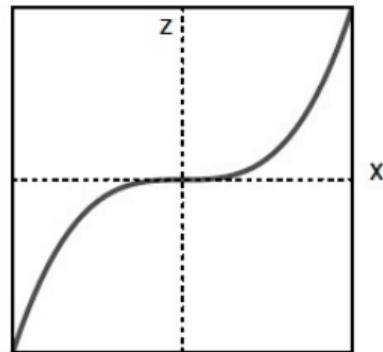
y esperamos obtener algo parecido a  $y = \frac{1}{2}\kappa x^2$ ,  $z = -\frac{1}{6}\kappa\tau x^3$ , y  $z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau^2}{\kappa}y^3$ .



(a) Osculating plane

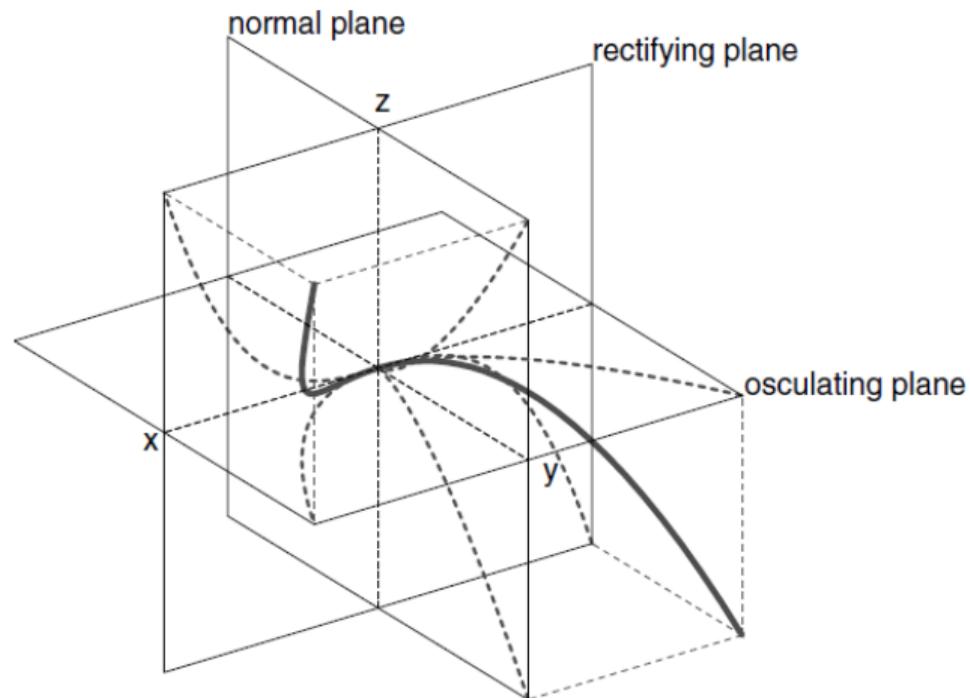


(b) Normal plane



(c) Rectifying plane

# Forma canónica local



Forma canónica local de las curvas de Frenet.

## Definición

Sea  $\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regular, parametrizada por longitud de arco, y de clase  $C^n$ .  $\alpha$  es una **curva de Frenet** si en todo punto  $s$ , los vectores  $\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(n-1)}(s)$  son l.i.

El **referencial de Frenet** de  $\alpha$  se define como  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  y está únicamente determinado por

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .
- Para todo  $k = 1, \dots, n - 1$ ,  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \alpha'(s), \dots, \alpha^{(k)}(s) \rangle$ .
- $\langle \alpha^{(k)}(s), \mathbf{e}_k \rangle > 0$ , para  $k = 1, \dots, n - 1$ .

**Obs:** Se puede usar el método de Gram-Schmidt para construir el referencial de Frenet a partir de las primeras  $n - 1$  derivadas  $\alpha$  en  $s$ .

## Teorema

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva de Frenet en  $\mathbb{R}^n$ , con referencial de Frenet  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Entonces, existen funciones  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$ , definidas en  $I$ , con  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} > 0$ , tales que  $\kappa_i$  es de clase  $C^{n-1-i}$  y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{n-1} \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \dots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad \forall s.$$

## Definición

$\kappa_i$  se llama la ***i*-ésima curvatura de Frenet**, y el sistema anterior se llaman las ***fórmulas de Frenet***.

Prueba:

Como  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , podemos descomponer

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para cada  $1 \leq i \leq n - 1$ , el vector  $\mathbf{e}_i$  está en el subespacio generado por  $\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(i)}(s)$ ,

$\Rightarrow \mathbf{e}'_i$  está en el subespacio  $\langle \alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(i+1)}(s) \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$ .

Luego,

$$\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_{i+2} \rangle = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_{i+3} \rangle = \dots = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_n \rangle = 0.$$

Definimos  $\kappa_i = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$ .

Por construcción del referencial de Frenet, para  $1 \leq i \leq n - 2$ , el signo de  $\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$  es el mismo signo de  $\langle \alpha^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$ , el cual es positivo (condición 3).

De ahí que  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1} > 0$ .

Por otro lado, como los  $\mathbf{e}_i$  son ortonormales, tenemos  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ .

Derivando en  $s$ ,

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle' = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j \rangle = 0.$$

En particular, de la ecuación anterior

$$\langle \mathbf{e}'_{i+1}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = -\kappa_i. \quad \square$$

## Comentarios:

- Una curva de Frenet en  $\mathbb{R}^n$  está contenida en un hiperplano  $H$  si, y sólo si,  $\kappa_{n-1} = 0$ .  
Esto es equivalentemente a requerir que  $\mathbf{e}_n$  sea un vector constante  $\kappa_{n-1} = 0$ , el cual es perpendicular a este hiperplano  $H$ .
- Como consecuencia, en ocasiones  $\kappa_{n-1}$  se llama la **torsión** de  $\alpha$ .