Geometría Diferencial 2022

Lista 4

25.mayo.2022

1. (La Pseudoesfera)
   Consideramos la curva tractriz (ver ejercicio 3 en Lista 01).
   a) Determine la superficie de revolución que se obtiene a partir de la tractriz, y hallar una parametrización alrededor de un punto regular.
   b) Muestre que la curvatura gaussiana de esta superficie en todo punto regular vale $K = -1$.

2. Calcular los símbolos de Christoffel para una superficie de revolución
$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \quad f(v) > 0, u \in (0, 2\pi), v \in (a, b).$$
   y a partir de estos, calcular la curvatura Gaussiana.

3. Mostrar la ecuación de Gauss: Si S es una superficie con parametrización ortogonal, $F = 0$, entonces
$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big)\Big].$$

4. a) Pruebe que toda superficie regular compacta S posee un punto elíptico.
   b) Muestre que toda superficie regular compacta S, con característica $\chi(S) \leq 0$ posee un punto hiperbólico.

5. Compruebe que no existe superficie $\mathbf{x}(u, v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$ y que $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

6. Justifique por qué las superficies siguientes no son localmente isométricas dos a dos:
   a) la esfera S^2,
   b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$,
   c) la silla $z = x^2 - y^2$.

7. a) Dar la expresión para la ecuación de las geodésicas sobre el toro $\mathbb{T}^2$, con la parametrización usual
$$\mathbf{x}(u, v) = (R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v), \quad R > r > 0, u, v \in (0, 2\pi).$$
   b) Considere las curvas $\alpha(t) = \mathbf{x}(a, bt)$ y $\beta(t) = \mathbf{x}(at, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Determinar para qué valores de a, b estas curvas son geodésicas.

   Obs! No son las únicas geodésicas sobre el toro. El siguiente documento ilustra todas las familias de las geodésicas sobre $\mathbb{T}^2$
   `http://www.rdrop.com/~half/math/torus/torus.geodesics.pdf`

8. (No Entregar) Leer el punto 7, al final de la sección 4.5 del libro de Do Carmo (pp. 283–286). Entender el material, y probar el Teorema del Índice de Poincaré:
   La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable X con puntos singulares sobre una superficie compacta S, es igual a la característica de Euler de S, esto es
$$\sum_{\mathbf{p}\in S} I\big(X(\mathbf{p})\big) = \chi(S).$$