Geometría Diferencial 2022

Lista 03

19.marzo.2022

1. Mostrar que el cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$ es una superficie regular, y encuentre parametrizaciones que cubran dicha superficie. Mostrar que el cono $C : x^2+y^2=z^2$ no es una superficie regular.

2. Sea $f(x,y,z)=z^2$. Muestre que 0 no es un valor regular de f y que aún así, $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.

3. Sea $f(x,y,z)=(x+y+z-1)^2$.

   a) Localizar los puntos críticos y valores críticos de f.

   b) ¿Para qué valores de c e conjunto $f(x,y,z)=c$ es una superficie regular?

   c) Responder las preguntas en (a) y (b) para la función $g(x,y,z)=xyz^2$.

4. Probar que $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

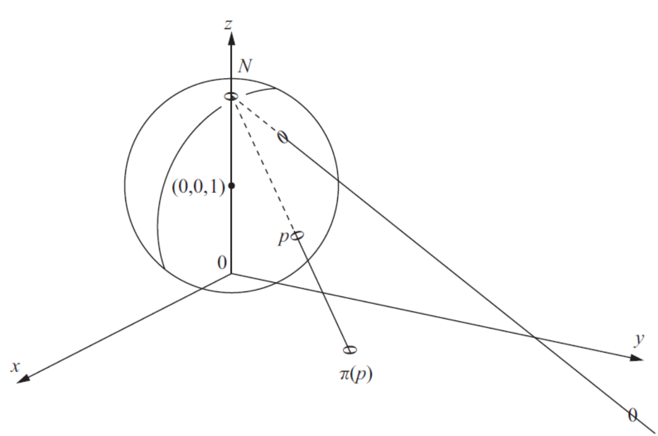
$$\mathbf{x}(u,v) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u), \quad a,b,c \neq 0,$$

   con $0<u<\pi, 0<v<2\pi$, es una parametrización para el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
   Describir geométricamente las curvas $u=const$ y $v=const.$ sobre el elipsoide.

5. Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera S^2, dada por $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, es considerar la **proyección estereográfica** $\pi : S^2-\{N\} \to \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $\mathbf{p}=(x,y,z)$ en la esfera S^2 menos el polo norte $N=(0,0,2)$ sobre la intersección del plano xy con la recta que conecta N con $\mathbf{p}$ (Fig. abajo). Sea $(u,v)=\pi(x,y,z)$, donde $(x,y,z) \in S^2-\{N\}$ y $(u,v) \in$ plano xy.

   a) Pruebe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ está dada por

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \quad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \quad z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}.$$



   b) Muestre que es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos cartas locales.

6. Sea $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la esfera unitaria y sea $A : S^2 \to S^2$ el mapa antipodal $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Pruebe que A es un difeomorfismo.

7. a) Mostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano.

   b) Construir un difeomorfismo entre el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y la esfera unitaria $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. Mostrar que la botella de Klein $\mathbb{K}$ no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:

$$\mathbb{K} = [0,1] \times [0,1] \; / \sim, \quad \text{donde } (u,0) \sim (u,1), \text{ y } (0,v) \sim (1, 1-v),$$

u otro modelo similar, como se ilustra en la Figura 1.

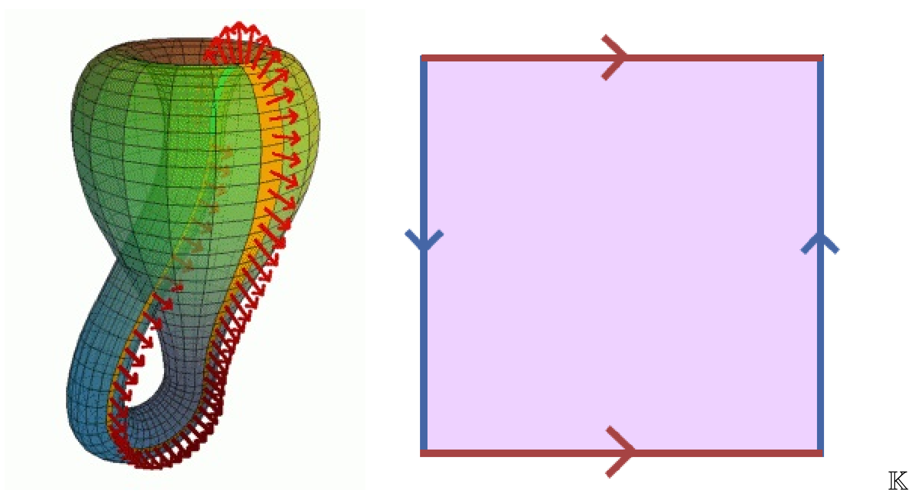


Figure 1: Botella de Klein. (a) como superficie en $\mathbb{R}^3$, (b) como espacio cociente.