Geometría Diferencial 2022

Lista 01

29.enero.2022

1. a) Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$, que no pasa por el origen O. Si $\alpha(t_0)$ es un punto del trazo de α que está más próximo a O, y $\alpha'(t_0) \neq 0$ entonces $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$

   b) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, con $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Mostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante > 0 si, y sólo si, $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$.

2. Considere la parametrización de la cicloide de radio r vista en aula.

   a) Calcular la longitud de arco de la cicloide en el primero de sus arcos, esto es correspondiente a una rotación completa del círculo.

   b) Calcular el área bajo la curva (entre la curva y el eje x) para este arco de cicloide.

3. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por
$$\big(\sin t, \cos t + \log \tan \tfrac{t}{2}\big),$$
donde t es el ángulo que el eje Oy hace con el vector $\alpha'(t)$. Esta curva se llama la *tractriz* (Figura en pág. 8 de Do Carmo). Mostrar que

   - α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \frac{\pi}{2}$.
   - La longitud del segmento de la tangente a la tractriz, entre el punto de tangencia y el eje Oy es constante e igual a 1.

4. Sea α una curva plana regular en coordenadas polares (r, φ), dada por $r = r(\varphi)$. Usando la notación $r' = \frac{\partial r}{\partial \varphi}$, verificar que la longitud de arco en el intervalo $[\varphi_1, \varphi_2]$ es
$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi,$$
y que la curvatura está dada por
$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}.$$

5. Calcular la curvatura de la *espiral de Arquímedes*, la cual está dada por $r(\varphi) = a\varphi$, a constante (Figural 1(a)).

6. Para la *espiral logarítmica*, dada en coordenadas polares por por $r(t) = ae^t$, $\varphi(t) = bt$, a, b constantes (Figura 1(b)), probar lo siguiente:

   a) La longitud de la curva en el intervalo $(-\infty, t]$ es proporcional al radio $r(t)$

   b) $\alpha(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$ y α tiene longitud de arco finita en el intervalo $[t_0, \infty)$.

   c) El vector $\alpha(t)$ tiene ángulo constante con el vector tangente $\alpha'(t)$.

   d)

7. Mostrar que la curva de menor longitud entre dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el segmento de recta que los une.
(Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 10, pág 11 de Do Carmo.)

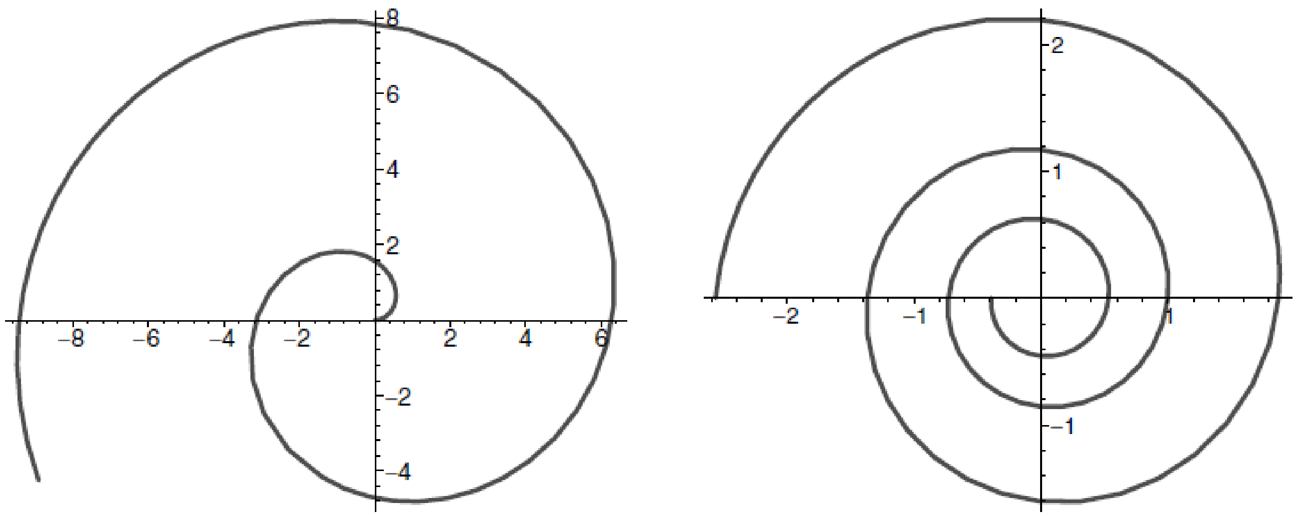

Figure 1: (a) espiral de Arquímedes, (b) espiral logarítmica.

8. Probar que la curvatura y la torsión de una curva de Frenet $\alpha(t)$ en $\mathbb{R}^3$, parametrizada de forma arbitraria, están dadas por
$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$
En particular, en el caso de curvas planas,
$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}.$$
(Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 12, pág 26 de Do Carmo.)

9. Sea α la *hélice* en $\mathbb{R}^3$, dada por
$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$
Muestre que la curvatura y la torsión de α son constantes.

10. Construir una curva plana, parametrizada por longitud de arco, cuya curvatura esté dada exactamente por $\kappa(s) = s^{-1/2}$.

---

11. (Ejercicio opcional, no es necesario entregar).
Suponga que para una curva de Frenet $\alpha(s)$ en $\mathbb{R}^n$, todas las cuvaturas κ_i en la matriz K del sistema de Frenet son constantes, $\kappa_i \neq 0$, $\forall i$.

    a) Mostrar que la solución de las ecuaciones de Frenet, está dada por una matriz exponencial $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 e^{sK}$, donde
    $$\exp\big(sK\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(sK)^n,$$
    y $\mathbf{x}_0 = x(s_0) \in \mathbb{R}^n$ es un punto o condición inicial de la curva.

    b) Para el caso de $\mathbb{R}^3$, demuestre que una curva de Frenet con curvatura $\kappa > 0$ y torsión $\tau > 0$ constantes, es necesariamente una hélice.
    Así, en $\mathbb{R}^3$ tenemos que
    $$\text{Si } \alpha(t) \text{ tiene } \kappa, \tau \text{ constantes } \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es una recta,} & \text{cuando } \kappa = 0; \\ \alpha \text{ es un círculo,} & \text{cuando } \kappa > 0, \tau = 0; \\ \alpha \text{ es una hélice,} & \text{cuando } \kappa, \tau > 0. \end{cases}$$
