# Geodésicas III. Transporte Paralelo

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 31) 12.mayo.2022

Vimos en la clase anterior la **ecuación de las geodésicas**

$$\sum_k \Big( a_k'' + \sum_{i,j} a_i' a_j' \Gamma_{ij}^k \Big) \mathbf{x}_k = 0.$$

la cual conduce al sistema de EDO

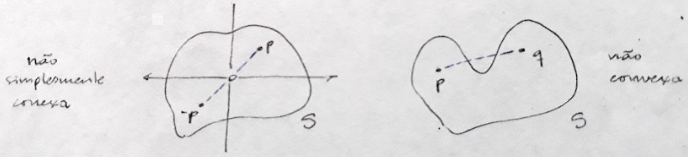
$$\boxed{a_k'' + \Gamma_{ij}^k (a^i)'(a^j)' = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.}$$

## Propiedad

*Dados* $\mathbf{p} \in S$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, *existen* $\varepsilon > 0$ *y una única geodésica* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *tales que* $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Prueba: Aplicar el teorema de existencia y unicidad de EDO al problema de valor inicial, con las condiciones iniciales $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. $\square$

Dada una hiperficie $S$ y puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$, no siempre existe una geodésica que pasa por **p** y **q**.




## Definición

*Una hiperficie $S$ se llama **completa** si toda geodésica en $S$ está totalmente contenida en $S$ (no sale fuera de $S$).*

## Proposición

*Si $S$ es una hiperficie completa y $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, entonces existe una única geodésica $\alpha$ en $S$ que pasa por **p** y **q**.* $\square$

# Campos Paralelos

Sea $S$ hiperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$. En la clase anterior vimos es es posible asociar campos de vectores a curvas sobre $S$.

## Definición

*Sea $\alpha : (a,b) \to S$ una curva sobre $S$. Una* ***campo de vectores** $X$ **a lo largo de*** *$\alpha$ es un mapa $X : (a,b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $X(t) \in T_{\alpha(t)}S$, $\forall t \in (a,b)$.*

*$X$ es* ***diferenciable*** *si para alguna parametrización $\mathbf{x}(u,v)$, las funciones componentes de $X = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(t)$ son todas diferenciables.*

Recordemos que es posible aplicar la derivada covariante a un campo vectorial tangente.

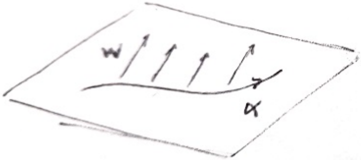
# Campos Paralelos

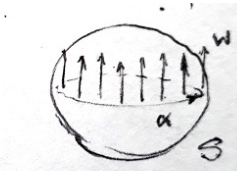
## Definición

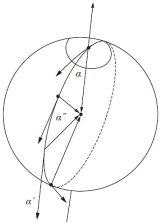
*Sea $S$ hiperficie, y $\alpha : (a, b) \to S$ una curva sobre $S$. Un campo de vectores tangentes $X$ es* ***paralelo*** *a lo largo de la curva $\alpha$ si $\nabla_\alpha X(t) = 0$, para todo $t \in (a, b)$.*

**Obs!** $X$ es paralelo a $\alpha$ significa que $X'(t)$ es normal al plano tangente $T_\alpha S$, $\forall t$.

Ejemplos: Los campos constantes.





UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

# Campos Paralelos

## Proposición

*$\alpha : (a, b) \to S$ es geodésica $\Leftrightarrow$ el campo $\alpha'$ es paralelo a $\alpha$.*
Prueba: $\alpha$ es geodésica $\Leftrightarrow\ \nabla_\alpha \alpha' = 0$. $\square$

## Proposición

*Si $X, Y$ son paralelos a lo largo de $\alpha$, entonces $\langle X(t), Y(t)\rangle$ es constante. En particular $|X(t)|$, $|Y(t)|$ y el ángulos entre $X$ y $Y$ son constantes.*

Prueba: Por definición $X, Y$ paralelos a lo largo de $\alpha$ implica que $X'(t)$ y $Y'(t)$ son normales a $T_{\alpha(t)}S$.
Luego $\langle X'(t), Y(t)\rangle = 0$, y $\langle Y'(t), X(t)\rangle = 0$. De ahí

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle X'(t), Y(t)\rangle + \langle X(t), Y'(t)\rangle = 0. \ \square$$

# Campos Paralelos

También, del aula anterior tenemos que si $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha$, entonces vale la **ecuación de los campos paralelos**

$$\nabla_\alpha X = \sum_k \Big( \xi_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \, \xi_i \, \xi_j \Big) \mathbf{x}_k = 0,$$

de modo que $\xi_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \, \xi_i \, \xi_j = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

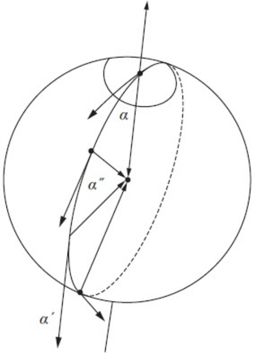
## Propiedad

*Sea $\alpha : (a, b) \to S$ una curva sobre $S$, con $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$. Dado $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S$, existe un único campo $X(t) \in T_{\alpha(t)}S$ paralelo a lo largo de $\alpha$, tal que $X(t_0) = \mathbf{v}$.*

<u>Prueba</u>: Aplicar existencia/unicidad a la ecuación de campos paralelos. $\square$

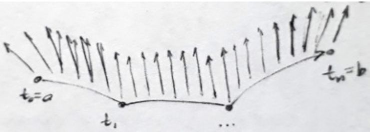
## Definición

*Sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva sobre $S$ y sean $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, $t_0 \in [a, b]$. Sea $X$ un campo paralelo a lo largo de $\alpha$, con $X(t_0) = \mathbf{v}$. El vector $X(t_1)$, $t_1 \in [a, b]$ es llamado el **transporte paralelo** de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\alpha$ en el tiempo $t_1$.*



# Transporte Paralelo

Una curva $\alpha : [a,b] \to S$ es de clase $C^k$ por partes si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$, tal que $\alpha|_{[t_{i-1},t_i]}$ es de clase $C^k$, $\forall i$.

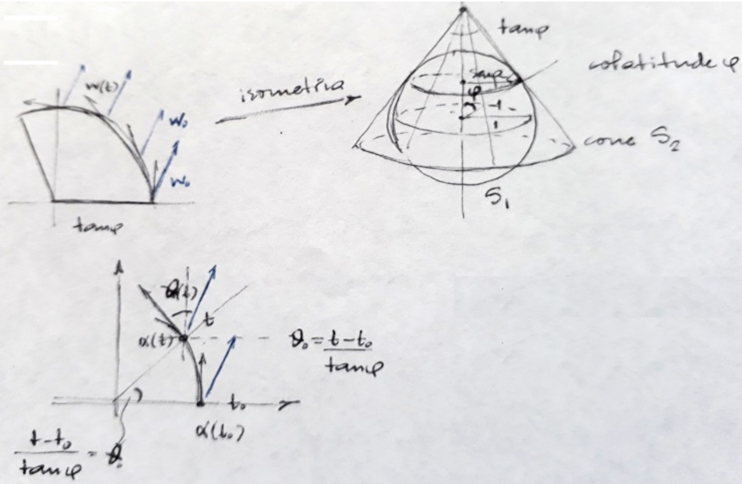



**Observaciones:**

- El transporte paralelo existe también para curvas diferenciables por partes. En este caso si $X$ es el campo transportado, éste es solo diferenciable por partes.

- Sean $S_1$, $S_2$ hiperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha : [a,b] \to S_1 \cap S_2$ una curva diferenciable (por partes) y suponga que $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$, $\forall t \in [a,b]$. Si $t_0 \in [a,b]$, sea $\mathbf{v} \in T_{\alpha(t_0)}S_1 = T_{\alpha(t_0)}S_2$ y sean $X_1(t)$, $X_2(t)$ transportes paralelos sobre $\alpha$ de $\mathbf{v}$ en $S_1$ y $S_2$, resp. Entonces $X_1(t) = X_2(t)$, $\forall t$.

Ejemplo:






UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

# Curvatura Geodésica

Sea $S$ superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, y $\alpha : [a, b] \to S$ una curva regular sobre $S$, parametrizada por longitud de arco $\Rightarrow \ |\alpha'|^2 = 1 \ \Rightarrow \ \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$. Entonces

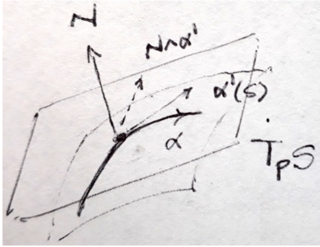
$$\langle \nabla_\alpha \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle (\alpha''(t))^T, \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Entonces, existe una función $\lambda(t)$ tal que $\nabla_\alpha \alpha'(t) = \lambda(t)\,(N \times \alpha'(t))$, $\forall t$.

### Definición

*Sea $\alpha$ como antes. La **curvatura geodésica** de $\alpha$ se define como*

$$\kappa_g(\alpha) = \lambda(t) = \langle \nabla_\alpha \alpha'(t), N \times \alpha'(t) \rangle.$$



# Curvatura Geodésica

**Obs!** El signo de $\kappa_g$ depende de la orientación de $S$ y la orientación de $\alpha$.

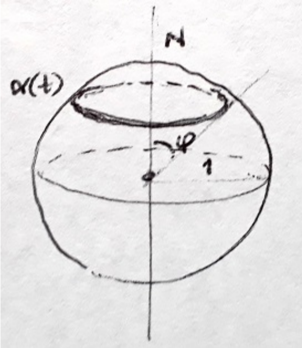
Consideremos $S$ una superficie en $\mathbb{R}^3$, y $\alpha$ una curva en $S$. Tenemos varias nociones de curvatura para $\alpha$:

- la curvatura de $\alpha$ en el espacio ambiente, $\kappa = |\alpha''(t)|$,
- la curvatura normal, $\kappa_n = \langle \alpha''(t), N \rangle$,
- la curvatura geodésica, $\kappa_g = \langle \alpha''(t), N \times \alpha'(t) \rangle$.

Se tiene el siguiente resultado:

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

(Así, $\kappa$ se descompone en una parte intrínseca $\kappa_g$ y una parte extrínseca $\kappa_n$).




Ejemplo:

Sea $C$ el círculo paralelo sobre $S^2$ a un ángulo latitudinal $\varphi$. Entonces

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \quad \kappa_n^2 = 1.$$

Luego

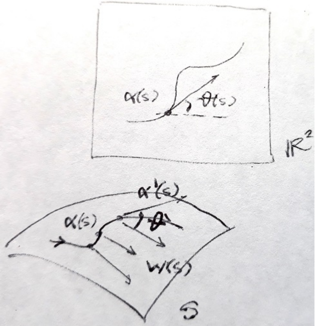
$$\kappa_g^2 = \kappa^2 - \kappa_n^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1 = \frac{\sin^2\varphi - 1}{\sin^2\varphi} = -\cot^2\varphi.$$

de modo que $\kappa_g = \cot\varphi$.

# Curvatura Geodésica

Recordemos que para una curva plana $\alpha(s)$, al considerar la indicatriz trangente $\theta(s)$, la curvatura de $\kappa$ de $\alpha$ está dada por $\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$.

Podemos generalizar este concepto a superficies usando el transporte paralelo. Dado un campo $X(s)$ paralelo a $S$, a lo largo de la curva $\alpha(s)$, sea $\theta(s)$ el ángulo entre $X(s)$ y $\alpha'(s)$.




## Lema

*Sea $X(s)$, $Y(s)$ campos paralelos sobre $S$ a lo largo de $\alpha$. Entonces*

$$\frac{d}{ds}\langle X(s), Y(s)\rangle = \langle \nabla_\alpha X(s), Y(s)\rangle + \langle X(s), \nabla_\alpha Y(s)\rangle. \qquad \square$$

## Lema

*Sean $X, X_1, X_2$ campos tangentes a $S$, a lo largo de $\alpha$, y sea $f : S \to \mathbb{R}^3$ diferenciable. Entonces*

- *i)* $\nabla_\alpha(X_1(s) + X_2(s)) = \nabla_\alpha X_1(s) + \nabla_\alpha X_2(s)$.
- *ii)* $\nabla_\alpha(fX)(s) = f(s)\nabla_\alpha X(s) + f'(s)X(s)$. $\square$

Sea $\{W_1(s), W_2(s)\}$ base ortonormal positiva para $T_{\alpha(s)}S$, con $W_2 = N \times W_1$. Si $W_1(s)$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha$, también lo es $W_2(s)$ y

$$W_2 = N \times W_1, \quad -W_1 = N \times W_2.$$

Como $\langle W_1, W_2\rangle = 0$, entonces

$$\tfrac{d}{ds}\langle W_1, W_2\rangle = \langle \nabla_\alpha W_1, W_2\rangle + \langle W_1, \nabla_\alpha W_2\rangle = \langle \nabla_\alpha W_1, W_2\rangle = 0.$$

# Curvatura Geodésica

Además, como $|W_2|^2 = 1$, entonces

$$\tfrac{d}{ds}\langle W_2, W_2\rangle = 2\langle \nabla_\alpha W_2, W_2\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \nabla_\alpha W_2, W_2\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \nabla_\alpha W_2 \mid\mid W_1.$$

Como podemos representar $\alpha'(s) = \cos\theta(s)W_1(s) + \sin\theta(s)W_2(s)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\theta'(s)\sin\theta(s)W_1(s) + \theta'(s)\cos\theta(s)W_2(s), \\ N \times \alpha'(s) &= -\sin\theta(s)W_1(s) - \cos\theta(s)W_2(s). \end{aligned}$$

Luego

$$\kappa_g(s) = \langle \nabla_\alpha \alpha'(s), N \times \alpha'(s)\rangle = \theta'(s)(\sin^2\theta(s) + \cos^2\theta(s)) = \theta'(s).$$

## Proposición

$\kappa_g = \theta'(s)$. $\square$

## Definición

*Sea $X(s)$ un campo tangente a $S \subset \mathbb{R}^3$ a lo largo de la curva $\alpha$, tal que $|X(s)| = 1$, $\forall s$. El **valor algebraico** de $\nabla_\alpha X$ es el número $[\nabla_\alpha X]$ tal que*

$$\nabla_\alpha X = \big[\nabla_\alpha X\big](N \times X).$$

## Proposición

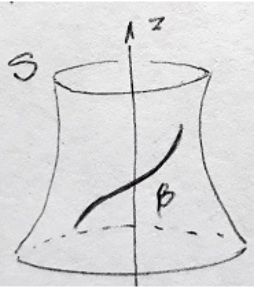
*Sea $S$ superficie orientada, y sean $X(s), Y(s)$ campos tangentes unitarios a $S$ a lo largo $\alpha$. Sea $\theta(s)$ el ángulo entre $X(s)$ y $Y(s)$. Entonces*

$$\theta'(s) = \big[\nabla_\alpha Y(s)\big] - \big[\nabla_\alpha X(s)\big]. \square$$

Ejemplo: Geodésicas en superficies de revolución.

Consideramos $S$ una superficie de revolución dada por la generatriz $\alpha(s) = (0, f(s), g(s))$, $f(s) > 0$, parametrizada por longitud de arco:

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\big).$$




Queremos determinar si una curva $\beta(s) = \mathbf{x}(a_1(s), a_2(s))$ en $S$ es geodésica. Para ello, usamos la ecuación de las geodésicas

$$a_k''(s) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \, a_i'(s)\, a_j'(s) = 0, \quad k = 1, 2.$$

# Geodésicas

En este caso, los coeficientes de la 1a. forma fundamental son $E = (f(v))^2$, $F = 0$, $G = 1$, y

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(f(v))^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -ff', \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

De la ecuación de las geodésicas resulta el sistema de EDO

$$u''(s) + 2\frac{f'(v(s))}{f(v(s))}\,u'(s)\,v'(s) = 0, \qquad (1)$$

$$v''(s) - f(v(s))\,f'(v(s))\,(u'(s))^2 = 0. \qquad (2)$$

# Geodésicas

Analizamos dos casos:

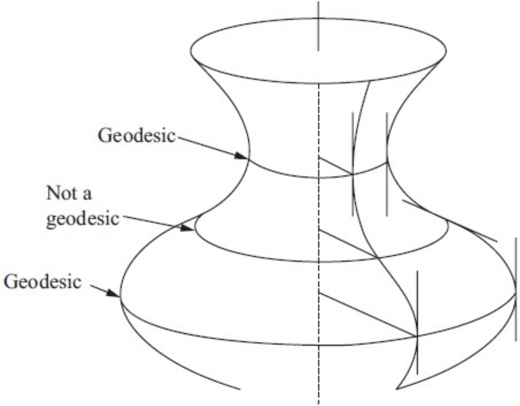
1. Si $u(s) = a$ es constante, entonces se satisface (1), de la ecuación (2) se tiene que $v'(s) = \pm 1$ (pues $v''(s) = 0 \;\Rightarrow v'(s)$ es constante. Normalizamos para que sea $\pm 1$.

   Entonces, $\beta(a, b+s)$ y $\beta(a, b-s)$ son geodésicas. En consecuencias, todos los meridianos de $S$ son geodésicas.

2. Si $v(s) = b$ es constante, entonces de la ecuación (2) tenemos $|u'(s)| = \frac{1}{f(b)}$ y $f'(b) = 0$. Luego, los paralelos correspondientes a puntos de la generatriz $\alpha$ con tangente paralelo al eje de revolución son geodésicas.

   Esto ocurre donde se alcanzan los radios máximos o mínimos.

# Geodésicas




Paralelos geodésicas en una superficie de revolución.


UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

# Relación de Clairaut

Consideramos las ecuaciones de geodésicas en superficies de revolución

$$\begin{aligned} u''(s) + 2\frac{f'(v(s))}{f(v(s))}\,u'(s)\,v'(s) &= 0, \\ v''(s) - f(v(s))\,f'(v(s))\,(u'(s))^2 &= 0. \end{aligned}$$

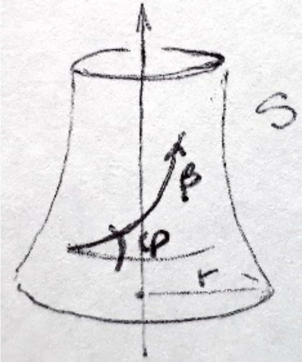
Entonces $\big[f(v(s))\big]^2 + 2f(v(s))\,(f \circ v)(s))\,u'(s) = 0 \Rightarrow$

$$\big[f(v(s))^2\,u'(s)\big]' = \big[f(v(s))\big]^2\,u''(s) + 2f(v(s))\,f'(v(s))\,u'(s)\,v'(s) = 0.$$

Esto implica que $f^2\,u' = const.$

Por otro lado, $f(v) = r$ es el radio respecto al eje de revolución. Observe que $\alpha'(s) = \mathbf{x}_u\,u'(s) + \mathbf{x}_v\,v'(s)$. Si $\varphi$ denota el ángulo entre la una geodésica $\beta$ y cualquier paralelo de $S$, este es dado por

# Relación de Clairaut




$$\cos\varphi = \frac{\langle \alpha', \mathbf{x}_u\rangle}{|\alpha'|\cdot|\mathbf{x}_u|} = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle\, u'}{|\mathbf{x}_u|} = \frac{f^2 u'}{f} = fu'.$$

Entonces $f^2\, u' = f \cdot f\, u' = r\cos\varphi$. De ahí se obtiene la **relación de Clairaut**

$$\boxed{r\cos\varphi = const.}$$

La recíproca no vale: por ejemplo los paralelos satisfacen $(r\cos\varphi)' = 0$, pero no siempre son geodésicas.