Curvaturas en superficies

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 21) 29.marzo.2022

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvaturas en superficies

En el aula anterior introdujimos la aplicación normal de Gauss

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con } \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}),$$

y la segunda forma fundamental

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Vimos que la segunda forma fundamental, de alguna manera codifica la información de la curvatura de la superficie S en el punto $\mathbf{p}$:

Existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$, en donde la segunda forma fundamental se escribe como

$$II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$$

donde κ_1, κ_2 y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ son las curvaturas y direcciones principales en $\mathbf{p}$.

En particular, recordemos que toda forma cuadrática (o más bien, toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) tiene dos invariantes importantes: su determinante y su traza.

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Sean κ_1 y κ_2 las curvaturas principales de S en $\mathbf{p}$.
*Definimos la **curvatura media** de S en $\mathbf{p}$ como*

$$H = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} DN(\mathbf{p}).$$

*Definimos la **curvatura de Gauss** de S en $\mathbf{p}$ como*

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \det DN(\mathbf{p}).$$

Obs!

- Las curvaturas H y K determinan completamente la información de la curvatura.

Esto es porque la traza y el determinante determinan automáticamente los autovalores de una matriz 2×2: los autovalores λ_1 y λ_2 satisfacen

$$2H = \operatorname{tr} T = \lambda_1 + \lambda_2, \quad K = \det T = \lambda_1 \lambda_2.$$

En este caso, las curvaturas principales κ_1 y κ_2 son las raíces del polinomio

$$x^2 - (\operatorname{tr} DN(\mathbf{p}))x + \det DN(\mathbf{p}) = x^2 - 2Hx + K = 0.$$

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Un punto $\mathbf{p} \in S$ se llama

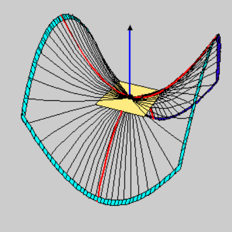
- ***elíptico**, si $K(\mathbf{p}) > 0$;*
- ***hiperbólico**, si $K(\mathbf{p}) < 0$;*
- ***parabolico**, si $K(\mathbf{p}) = 0$, pero $DN(\mathbf{p}) \neq 0$;*
- ***planar**, si $DN(\mathbf{p}) = 0$.*

Definición

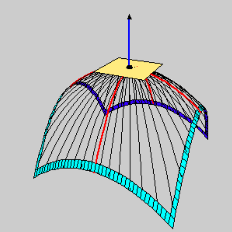
*Un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p})$ se llama un **punto umbílico**.*

Obs!: Si todos los puntos de una superficie S son umbílicos, entonces S está contenida en un plano o una esfera.

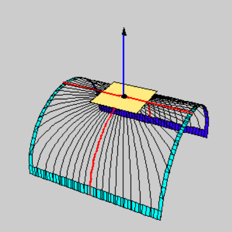
Curvaturas



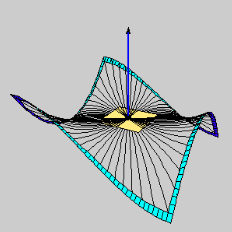
hiperbólico



elíptico



parabólico

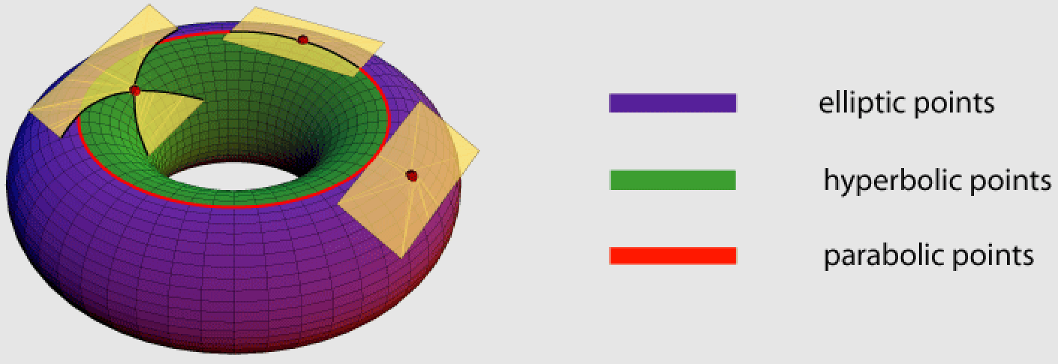


planar

Ejemplos:

- Todo punto de una esfera es elíptico.
- El origen de la superficie $x^2 - y^2 = z$ es hiperbólico.
- Todo punto del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es parabólico.
- en la superficie $z = x^4 + y^4$, el origen es planar.

Ejercicio para pensar:
¿En el toro, cuáles puntos son elípticos? ¿Cuáles son hiperbólicos? ¿Hay puntos parabólicos? ¿Y planares?



Clasificación de la curvatura en puntos del toro $\mathbb{T}^2$.

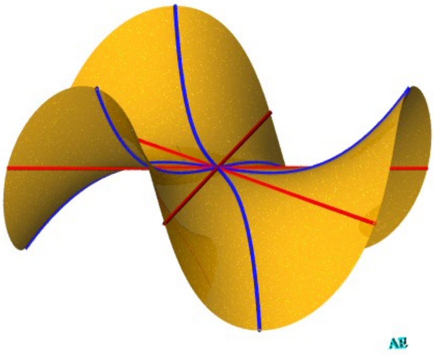
Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Una **dirección asintótica** de S en $\mathbf{p}$ es una dirección $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ para la cual la curvatura normal $\kappa(\mathbf{v}) = 0$.*

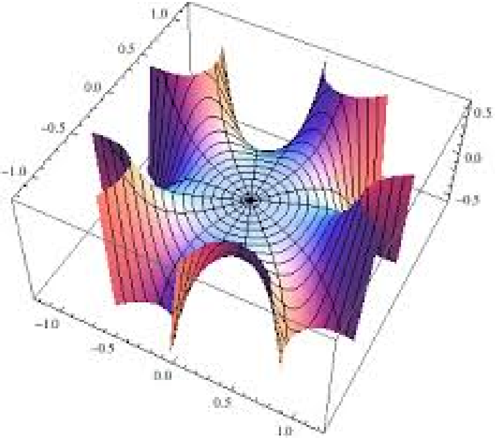
*Una **curva asintótica** de S es una curva regular conexa $\alpha(t) \subseteq S$, tal que para cada punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, el vector tangente $\alpha'(t)$ es una dirección asintótica.*

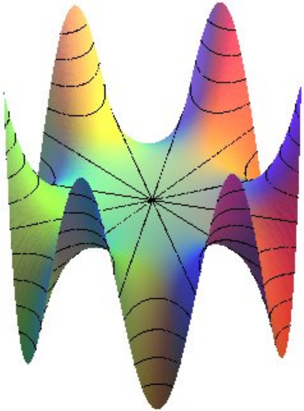
Definición

*Una **curva principal** de S es una curva regular conexa $\alpha(t) \subseteq S$, tal que para cada punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, el vector tangente $\alpha'(t)$ es una dirección principal.*



Direcciones asintóticas en un punto hiperbólico de S.





Otros ejemplos de direcciones asintóticas y puntos parabólicos.

Definición

Sea $\mathbf{p} \in S$. *La* ***indicatriz de Dupin*** *de* S *en* $\mathbf{p}$ *es el conjunto de vectores* $\mathbf{v}$ *en* $T_{\mathbf{p}}S$ *tales que* $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \pm 1$.

Tomemos $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$. Entonces, $\mathbf{w} = \rho\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$.
Luego, la fórmula de Euler nos da

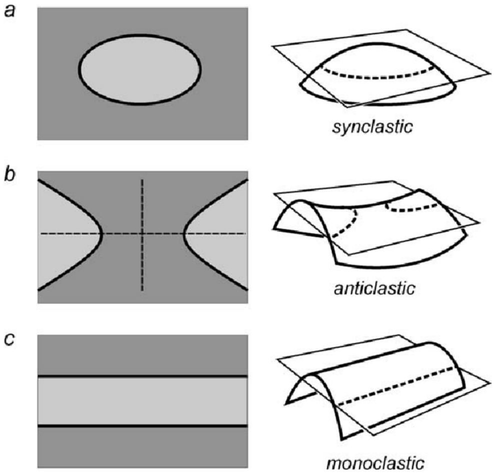
$$\pm 1 = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \rho^2 II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_1\rho^2\cos^2\varphi + \kappa_2\rho^2\sin^2\varphi = \kappa_1\xi^2 + \kappa_2\zeta^2,$$

donde $\xi = \rho\cos\varphi$, $\zeta = \rho\sin\varphi$ y $\mathbf{w} = \xi\mathbf{e}_1 + \zeta\mathbf{e}_2$.

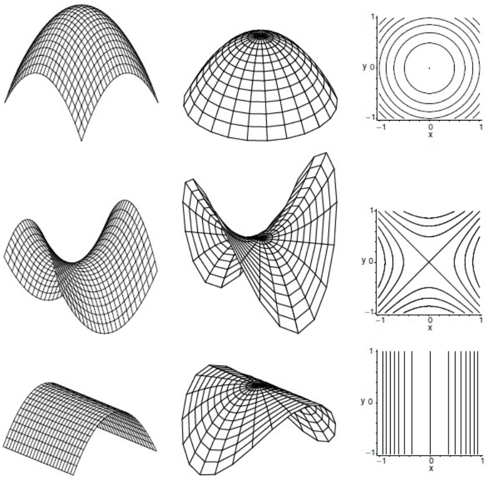
En el sistema coordenado (ξ, ζ) la indicatriz de Dupin se resume a

$$\kappa_1\xi^2 + \kappa_2\zeta^2 = \pm 1.$$

La indicatriz de Dupin



La indicatriz de Dupin



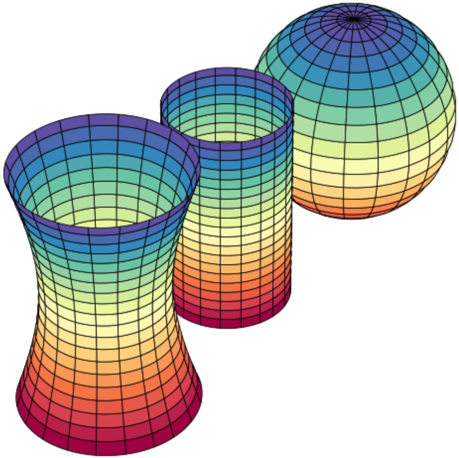
La indicatriz de Dupin

Importante!
Sabemos que localmente, toda superficie regular se comporta como la gráfica de alguna función $z = f(x, y) = g(\xi, \zeta)$.

En las coordenadas (ξ, ζ), la indicatriz de Dupin nos da el comportamiento local de esta superfice, en una vecindad del punto $\mathbf{p} \in S$ como origen.

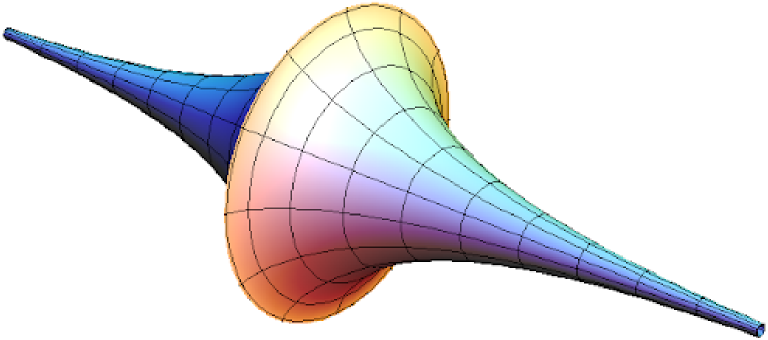
De aquí la idea de una tríada de comportamientos: elíptico, parabólico o hiperbólico.

Pregunta: ¿Pueden dar ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$?
¿Y de curvatura media $H > 0$, $H = 0$, $H < 0$?



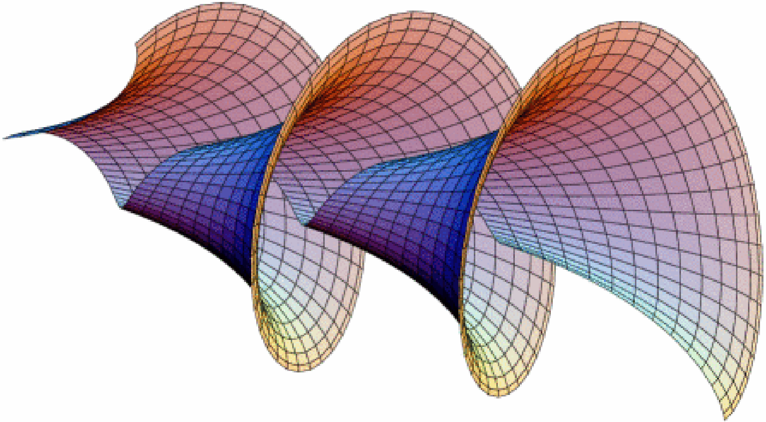
Algunas superficies con curvatura gaussiana: (a) $K < 0$, (b) $K = 0$, (c) $K > 0$.

Pregunta: ¿Existen superficies de curvatura gaussiana K constante? ¿Y de curvatura media H constante?



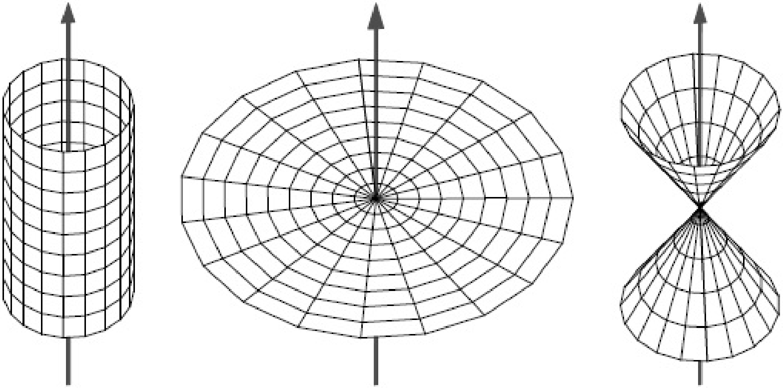
La pseudo-esfera (o tractroide) tiene curvatura constante $K = -1$.

Superficies de curvatura constante



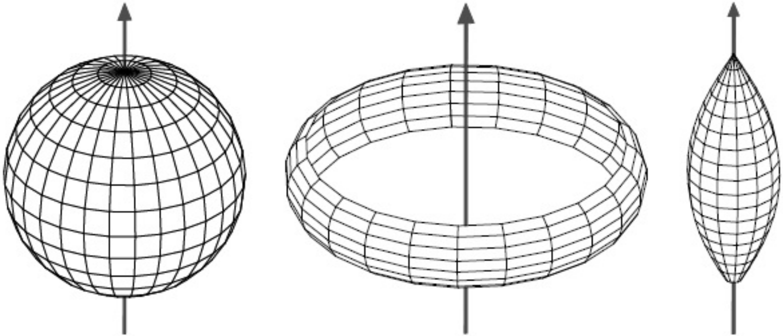
Una superficie de curvatura media constante $H < 0$.

Superficies de curvatura constante



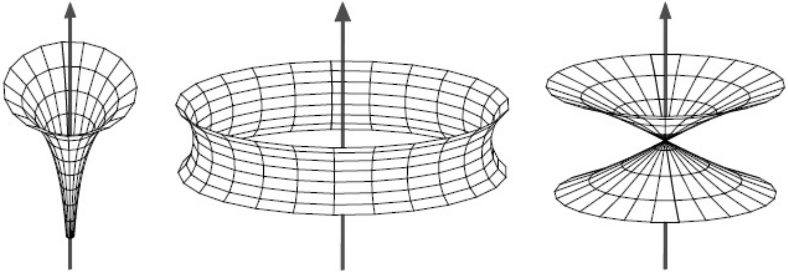
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K = 0$.

Superficies de curvatura constante



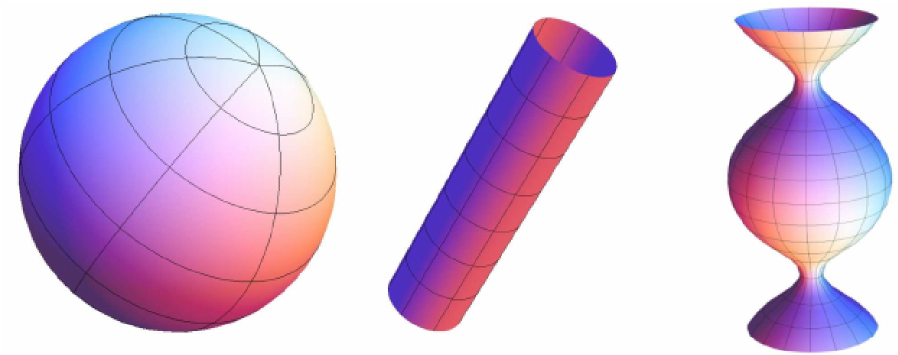
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K > 0$.

Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana $K < 0$.

Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura media constante H: (a) la esfera, (b) el cilindro, (c) el unduloide.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular orientable, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ una parametrización, con mapa de Gauss $N(\mathbf{p}) : U \to S^2$.

i) *Para cada $\mathbf{p} \in U$, $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$ es un isomorfismo lineal. El mapa $L = -DN$ se llama el* ***mapa de Weingarten*** *u* ***operador de forma*** *de $\mathbf{x}$.*

ii) *L es independiente de la parametrización $\mathbf{x}$ (a menos de cambio de orientación del campo normal unitario N), y es un operador autoadjunto con respecto a la primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$.*

Prueba:
(i) Se sigue simplemente de la relación $0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle N, N\rangle = 2\langle \frac{\partial}{\partial u_i} N, N\rangle$. Por tanto, ambos vectores N_u, N_v son ortogonales a N. Que el mapa $DN(\mathbf{p})$ es un isomorfismo lineal se sigue del hecho que $D\mathbf{x}$ tiene rango máximo.
Para mostrar (ii), sea $\mathbf{x} = \mathbf{x} \circ \varphi$, de modo que la normal correspondiente es $\widetilde{N} = \pm N \circ \varphi$ y

$$\widetilde{L} = -D\widetilde{N} \circ D\widetilde{\mathbf{x}}^{-1} = (\pm DN \circ D\varphi) \circ (D\varphi^{-1} \circ D\mathbf{x}^{-1}) = \pm DN \circ D\mathbf{x}^{-1} = \pm L.$$

La propiedad de que L es autoadjunta se ve más fácilmente en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, donde tenemos que $L\mathbf{x}_u = -N_u$ y $L\mathbf{x}_v = -N_v$:

$$\langle L\mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j}\rangle = -\langle N_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j}\rangle = -\frac{\partial}{\partial u_i}\langle N, \mathbf{x}_{u_j}\rangle + \langle N, \mathbf{x}_{u_i u_j}\rangle.$$

Esta última expresión es simétrica en i y j.

Coordenadas locales

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular orientable, y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ parametrización. Sea N el campo normal a $\mathbf{x}$ y L el mapa de Weingarten. La **tercera forma fundamental** de S en $\mathbf{p}$ se define como*

$$III_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = I_{\mathbf{p}}(DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}) = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle D^2N(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}.$$

- $II_{\mathbf{p}}$ y $III_{\mathbf{p}}$ son formas bilineales en $T_{\mathbf{p}}S$, $\forall \mathbf{p} \in S$.

Proposición

Vale la siguiente relación entre las primeras tres formas fundamentales $I_{\mathbf{p}}$, $II_{\mathbf{p}}$, $III_{\mathbf{p}}$:

$$III_{\mathbf{p}} - \mathrm{tr}(L)\, II_{\mathbf{p}} + \det(L)\, I_{\mathbf{p}} = 0. \quad \square$$