El Plano Tangente

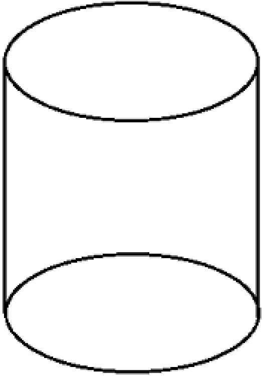
Alan Reyes-Figueroa

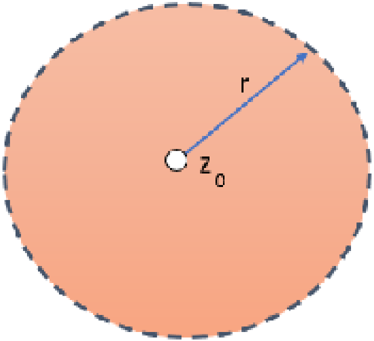
Geometría Diferencial

(Aula 15) 08.marzo.2022

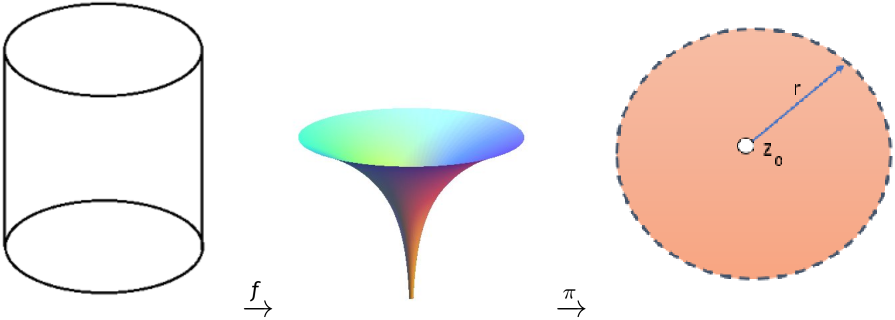
Ejercicio

El cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es difeomorfo al plano puncturado $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.





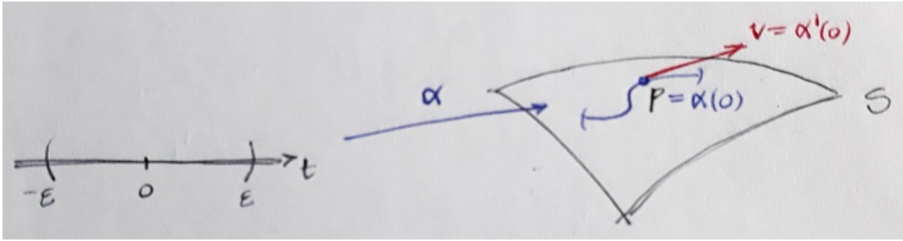
Ejercicio



Considere la composición de los mapas
$f : (\cos u, \sin u, v) \to (\log v \cos u, \log v \sin u, v)$ y $\pi : (x, y, z) \to (x, y)$.

Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Diremos que el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es **tangente** a S en el punto $\mathbf{p} \in S$ si existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.*



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

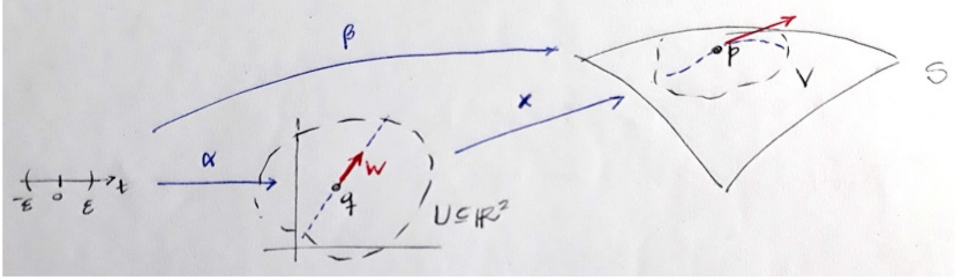
Propiedad

Sea $\mathbf{x}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq S$ *una parametrización de la superficie regular* S*, en el punto* $\mathbf{p} \in V \cap S$*, con* $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$*. Entonces, el conjunto* $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$ *coincide con el conjunto de los vectores tangentes a* S *en* $\mathbf{p}$*.*

Prueba:
Considere $T_\mathbf{p}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } \mathbf{p}\}$. Mostramos que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 = T_\mathbf{p}S$.

[$\subseteq$] Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{w}$ la recta en dirección de $\mathbf{w}$ pasando por $\mathbf{q}$, dentro del dominio U. Luego, $\alpha(0) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Definamos la curva $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$ sobre S

El plano tangente



Entonces, $\beta(0) = \mathbf{x} \circ \alpha(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, y por la regla de la cadena tenemos

$$\beta'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w},$$

de modo que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$. Como $\mathbf{w}$ es arbitrario, esto muestra que $D\mathbf{x}(q) \cdot \mathbb{R}^2 \subseteq T_{\mathbf{p}}S$.

El plano tangente

[$\supseteq$] Sea $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S$.
Entonces, existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subseteq S$ tal que $\beta(0) = \mathbf{p}$ y $\beta'(0) = \mathbf{v}$.
Definamos $\alpha = \mathbf{x}^{-1}\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subseteq \mathbb{R}^2$. Observe que siendo $\mathbf{x}$ y β diferenciables, entonces α es también diferenciable. Luego,
$\alpha(0) = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$.

Como $\mathbf{x} \circ' alpha = \beta$, entonces de la regla de la cadena

$$\mathbf{v} = \beta'(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w} \in D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2.$$

Siendo $\mathbf{v}$ arbitrario en $T_\mathbf{p}S$, esto muestra que $T_\mathbf{p}S \subseteq D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$, lo que concluye la igualdad. $\square$

Corolario

Para todo punto $\mathbf{p}$ *de una superficie regular* S*, el plano tangente* $T_{\mathbf{p}}S$ *es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base para este espacio es* $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$*, donde*

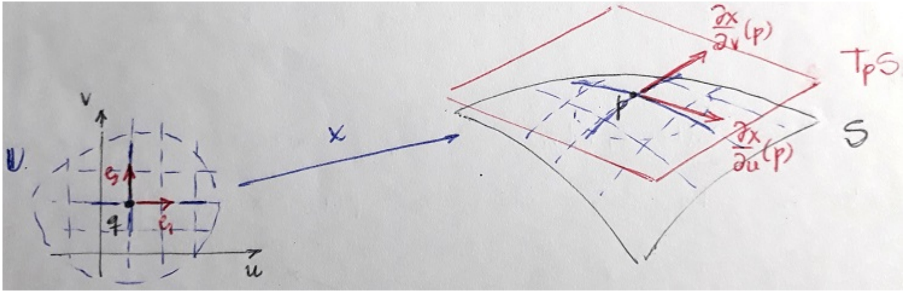
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2.$$

<u>Prueba</u>:

- Como S es superficie regular y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un mapa lineal inyectivo $\Rightarrow T_{\mathbf{p}}S = \operatorname{Im} D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un espacio vectorial y $\dim T_{\mathbf{p}}S \geq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

El plano tangente

- Por el Teorema de la Dimensión, $\dim T_{\mathbf{p}}S \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Portanto, $\dim T_{\mathbf{p}}S = 2$.
- Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \to T_{\mathbf{p}}S$ es un isomorfismo lineal, entonces $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$ es una base para $T_{\mathbf{p}}S$. $\square$



El plano tangente

Definición

*A $T_{\mathbf{p}}S$ se le llama el **plano tangente** a la superficie S en $\mathbf{p}$.*

Observaciones:

- La base $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$ se llama la **base canónica** o la base de $T_{\mathbf{p}}S$ asociada a la parametrización $\mathbf{x}$.
- Usualmente escribiremos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).$$

- El plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{x}$, ni de la curva α.

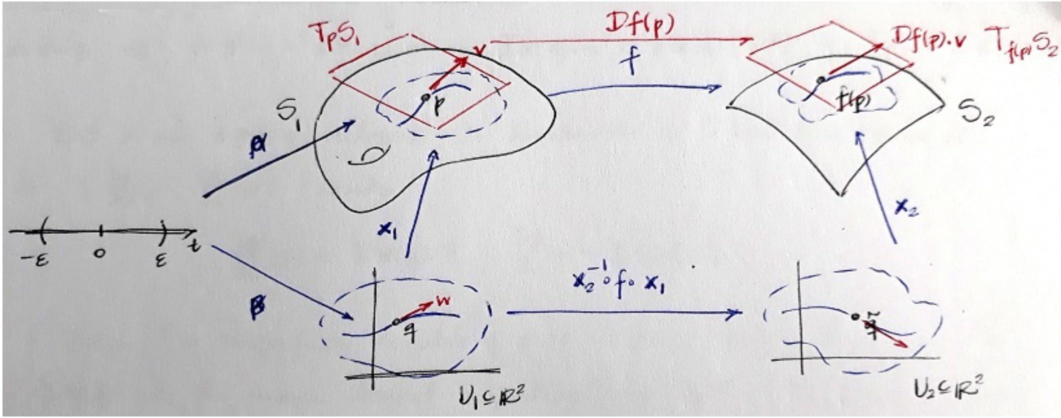
Definición

Sean S_1, S_2 superficies regulares, y sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable. Dados, $\mathbf{p} \in \S_1$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1$, entonces existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subseteq S_1$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

*La **derivada** de f en $\mathbf{p}$ es la aplicación lineal $Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \to T_{f(\mathbf{p})}S_2$ dada por*

$$Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (f \circ \alpha)'(0).$$

El plano tangente



El plano tangente

Observaciones:

- La regla de la cadena implica que $(f \circ \alpha)'(0) = Df(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$.
- La derivada $Df(\mathbf{p})$ no depende de la curva α.
- Si $\mathbf{x} : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ es una parametrización , y $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U_1)$, definamos $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to_1$ es una curva diferenciable. Suponga que $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \alpha'(0) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = D\mathbf{x}(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot (u'(0), v'(0)) \\
&= u'(0) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 + v'(0) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = u'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) + v'(0) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \\
&= v_1 \, \mathbf{x}_u(\mathbf{q}) + v_2 \, \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

El fibrado tangente

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, con U abierto, una carta local de S. Sea $\mathbf{p} \in S$, y sea $T_{\mathbf{p}}S$ el plano tangente a S en $\mathbf{p}$.

Definición

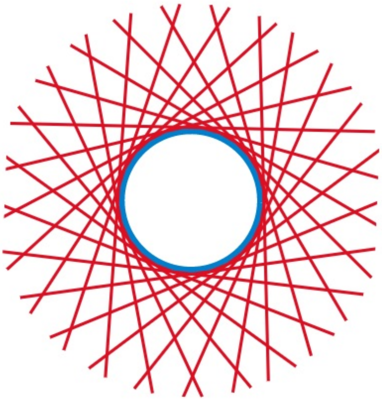
*El **fibrado tangente** TS de la superficie S es la unión disjunta de los espacios tangentes $T_{\mathbf{p}}S$ sobre los diferentes puntos $\mathbf{p}$ de la superficie:*

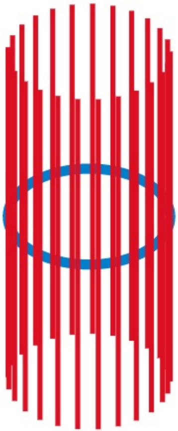
$$TS = \bigsqcup_{\mathbf{p}\in S} T_{\mathbf{p}}S = \bigcup_{\mathbf{p}\in S} \{\mathbf{p}\} \times T_{\mathbf{p}}S.$$

Así, un elemento de TS se puede pensar como un par ordenado $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{p}$ es un punto de S y $\mathbf{v}$ es un vector tangente a S en el punto $\mathbf{p}$. Existe una proyección

$$\pi : TS \twoheadrightarrow S,$$

El fibrado tangente





El fibrado tangente TS^1 al círculo S^1.

El fibrado tangente

Obs!

- Para una curva C (variedad 1-dimensional), el fibrado tangente TC tiene dimensión 2.
- Mientras que un espacio tangente $T_{\mathbf{p}}S$ tiene dimensión 2, el fibrado tangente TS tiene dimensión 4.
- En general, para una variedad n-dimensional M, su espacio tangente $T_{\mathbf{p}}M$ tiene dimensión n, y su figrado tangente TM tiene dimensión $2n$.