Tensores

Seminario 2

Jose Ramos

Universidad del Valle de Guatemala

Objetivos

1. Presentar la defінción de los tensores (1,s) y (0,s).
2. Generalizar el concepto utilizando tensores (r,s).
3. Presentar ejemplos conocidos de tensores (1,s) y (0,s).

Recordemos:

$\{\frac{\partial}{\partial x_i}, i \leq n\}$ es una base para T_pM

Notación:

$(\times A)^n = A \times A \times ... \times A$ n veces.

Tensor covariante de grado s (0,s)-tensor en p: [1]
Es un mapa multineal $A_p : T_pM \times T_pM \times ... \times T_pM = (\times T_pM)^s \to R.$
La base para el espacio vectorial de $(0, s)$ tensores consiste de los elementos: $(dx_{j1} \otimes ... \otimes dx_{js})$ que se definen por
$(dx_{j1} \otimes ... \otimes dx_{js}) := (dx_{j1} \otimes ... \otimes dx_{js})(\frac{\partial}{\partial x_{l1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{ls}}) = \delta_{j1}^{l1} \cdots \delta_{js}^{ls}$ donde $lk \leq n, jk \leq n$

(1,s)-tensor en p:
Es un mapa multineal $A_p : T_pM \times T_pM \times ... \times T_pM = (\times T_pM)^s \to T_pM$ donde los elementos de la base son de la forma $(dx_{j1} \otimes ... \otimes dx_{js})\frac{\partial}{\partial x_i}$

Ejemplos

Def:
Un mapeo diferenciable es $X : M \to T_pM$,
$X_p = \sum_i c_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, es un (1,0) tensor.

Las uno formas tienen la forma siguiente:
$w(p) = \sum_i w_i(p) dx_i|_p$, $w : T_pM \rightarrow R$ por lo que son (0,1) tensores.

Funciones escalares

Son funciones $f : M \to R$ entonces son tensores (0,0).

Métricas Riemmanianas

Recordemos que las métricas Riemmanianas tienen la forma $g_p = \sum_{ij} g_{ij}(p) dx_i|_p \otimes dx_j|_p$, y estas pertenecen a los tensores (0,2).

Un tensor s-covariante y r-contravariante en p ((r,s)-tensor) tiene la forma siguiente:

$A_p : (\times T_p M^*)^r \times (\times T_p M)^s \to R$

Entonces

$A_p(dx_{k1}, ..., \frac{\partial}{\partial_{ls}}) = (\frac{\partial}{\partial x_{i1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{ir}} \otimes dx_{j1} \otimes ... \otimes dx_{js})(dx_{k1}, ..., \frac{\partial}{\partial_{ls}})$

Wolfgang Kühnel.
Differential geometry, volume 77.
American Mathematical Soc., 2015.