Tensor de Ricci y de Einstein

Estuardo Díaz

Universidad del Valle de Guatemala

Table of Contents

Table of Contents

La contrucción de trazas de objetos es un importante proceso en matemáticas, así como el cálculo de determinantes.

Por ejemplo, para matrizes de $SO(3)$, uno puede determinar el ángulo de rotación únicamente conociendo la traza de la matriz. Similarmente, la curvatura media es una traza.

Introducción

Además, todas las cantidades promedio que se forman a partir de la curvatura son trazas, en particular las trazas del tensor de curvatura. Por lo tanto es importante generalizar y estudiar la noción de trazas.

Nota: La traza de un mapeo lineal entre espacios vectoriales es independiente de la base.

Trazas de un tensor

Sea A un $(1,1)$-tensor, $A_p : T_pM \longrightarrow T_pM$. Definimos la contracción o la traza CA como

$$CA\big|_p = \operatorname{Tr}(A_p) = \sum_i \langle A_p E_i, E_i \rangle$$

donde $E_1, \dots, E_n$ es una base ortonormal de T_pM. En una base arbitraria $b_1, \dots, b_n$ con $Ab_j = \sum_i A^i_j b_i$, la traza puede expresarse con la fórmula $\sum_i A^i_i$.

Trazas de un tensor

Sea A un $(1,s)$-tensor. Entonces, para todo $i \in \{1,\ldots,s\}$ y vectores fijos $X_j, j \neq i, A\left(X_1,\ldots,X_{i-1},-,X_{i+1},\ldots,X_s\right)$ es un $(1,1)$ tensor, cuya contracción (o traza) es denotada por C_iA :

$$
\begin{gathered}
C_iA\left(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_s\right) \\
= \sum_{j=1}^{n} \left\langle A\left(X_1,\ldots,X_{i-1},E_j,X_{i+1},\ldots,X_s\right), E_j\right\rangle
\end{gathered}
$$

C_iA es entonces un $(0,s-1)$-tensor.

Divergencia

La *divergencia* de un campo vectorial Y está definida como la traza de ∇Y, i.e.

$$\operatorname{div} Y = C\nabla Y = \sum_i \langle \nabla_{E_i} Y, E_i \rangle$$

Divergencia

La divergencia de un $(0,2)$-tensor simétrico A está definida de manera similar, como

$$(\operatorname{div} A)(X) = \sum_i \left(\nabla_{E_i} A\right)(X, E_i)$$

Table of Contents

Tensor de Curvatura

El valor de $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ en el punto p depende solo del valor de X, Y, Z en p.

En otras palabras, decimos que

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

es un campo tensorial, que llamamos el *tensor de curvatura* de la superficie.

Tensor de Curvatura

La ecuación de Gauss puede escribirse cómo
$R(X,Y)Z = \langle LY, Z\rangle LX - \langle LX, Z\rangle LY$ Este campo tensorial depende únicamente de la primera forma fundamental.

Table of Contents

Tensor de Ricci

La primera contracción o traza del tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ está dado por

$$(C_1R)(Y, Z) = \mathrm{Tr}(X \longmapsto R(X, Y)Z) = \sum_i \langle R(E_i, Y)Z, E_i \rangle$$

y es llamado **el tensor de Ricci** $\mathrm{Ric}(Y, Z)$, o de manera abreviada, $Ric = C_1R$.

Tensor de Ricci

La traza del tensor de Ricci es llamada la **curvatura escalar** S. Se tiene que

$$S = \sum_{i,j} \langle R\left(E_i, E_j\right) E_j, E_i \rangle$$

Podemos interpretarlo como la segunda traza del tensor de curvatura

Table of Contents

Espacios de Einstein

Una variedad Riemanniana (M, g) se llama un **espacio de Einstein** (en dónde g se refiere como la métrica de Einstein), si el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica g:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda \cdot g(X, Y)$$

para todo X, Y, con una función $\lambda : M \to \mathbb{R}$. Calculando trazas, notamos que $S = n\lambda$.

Tensor de Einstein

El **tensor de Einstein** G está definido como $G = \mathrm{Ric} - \frac{S}{2}g$. En una variedad Riemanniana arbitraria, la divergencia del tensor de Einstein desaparece, i.e.,

$$\mathrm{div}(\mathrm{Ric}) = \mathrm{div}\left(\frac{S}{2}g\right)$$

Referencias

- Kühnel, Wolfgang, 1950–[Differentialgeometrie. English] Differential geometry : curves, surfaces, manifolds / Wolfgang Kühnel ; translated by Bruce Hunt. — Third edition.