La variación del funcional de Hilbert-Einstein

Geometría Diferencial

Mariana Morales

- Definición: Sea (M, g) una variedad compacta riemaniana que se asume es orientable. Sea dV_g el elemento del volumen como $dV_g = \sqrt{Detg_{ij}}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Se definen los siguientes funcionales fijando M y variando la métrica g

    - $Vol(g) = \int_M dV_g$ _(volumen de g)_
    - $S(g) = \int_M S_g dV_g$ _(curvatura escalar total de g)_

Donde el funcional S es el _funcional de Hilbert-Einstein_

Objetivo

- Calcular la “derivada” de S considerando el problema variacional $\delta S = 0$.
- Las métricas $g \ \ni \delta S = 0$ tienen propiedades geométricas interesantes.

Ejemplo

- Consideremos $n = 2$ entonces por el teorema de Gauss-Bonnet tenemos $S(g) = 2\int_M KdV = 4\pi\chi(M)$ donde $\chi(M)$ denota la característica de Euler de M. Lo cual implica que el funcional $S(g)$ es constante si M es fijo.

- Definición: sea M una variedad con una métrica g dada. La <u>*variación de la métrica en dirección h*</u> con el parámetro real t esta definido por

$$g_t := g + t \cdot h$$

Donde h es un (0,2) campo tensorial, arbitrario pero fijo

- Entonces considerando la definición anterior la derivada de la función real $t \to S(g_t)$ en el punto $t = 0$ se puede ver como la derivada direccional de S en la dirección h en el punto g, y podemos estudiar el problema variacional $\delta S(g) = 0$ i.e. la condición $\delta S(g) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} S(g_t) \Big|_{t=0} = 0 \ \forall h$

- Para evaluar la derivada de S en la dirección h es necesario calcular las partes individuales, que son:
    - La derivada de S_g con respecto de t
    - La derivada del tensor curvatura con respecto de t
    - La derivada del elemento del volumen con respecto de t

- Lema: sea dV_t el elemento del volumen de $g_t = g + t{\cdot}h$ con $dV_0 = dV_g$.

  Entonces $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} (dV_t) = \dfrac{1}{2} Tr_g h{\cdot}dV_g$

- Teorema: Sea M una variedad compacta y orientable y sea $g_t = g + t \cdot h$ la variación de la métrica g. Sea S_t la curvatura escalar de g_t. Entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S(g_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M S_t dV_t = \left\langle \frac{S}{2} g - Ric, h \right\rangle_g$$