Ecuaciones de campo de Einstein

Juan Carlos Menchú Nij

3 de junio de 2021

Contenido

Contenido

Corolario (Teorema de Gauss - Bonnet)

Para un $n = 2$ se tiene la relación $\frac{s}{2}g - Ric = 0$, de modo que el funcional $S(g)$ es localmente constante. Fijando la variedad M y variando la métrica g, que requiere solamente que este definida positiva, $S(g)$ es incluso globalmente constante, ya que dos métricas de Riemann se puede perturbar suavemente entre sí: $\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2$ es definida positiva para $0 \leq \lambda \leq 1$ tanto que g_1 y g_2 sean definida positiva.

Observación

La fórmula de Gauss-Bonnet también es válida en el caso de métricas indefinidas en dos variedades. De hecho, el argumento del corolario anterior, muestra que la función $S(g)$ es localmente constante. Pero esto aún no permite una conclusión sobre el valor global, ya que $\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2$ se puede degenerar cuando g_1 y g_2 son indefinidos.

Observación

La situación en variedades n-dimensionales con $n \geq 3$ es bastante diferente, ya que la función S(g) en este caso casi nunca es constante. En cambio, si se fija este, se obtienen ecuaciones de Euler-Lagrange no triviales.

Contenido

Corolario

Corolario (Ecuaciones de Euler - Lagrange)

Sea M una variedad compacta de dimensión $n \geq 3$, y sea g un métrica fija en M con una variación: $g_t = g + th$, en la que el simétrico $(0,2)$-tensor donde h es arbitrario. Entonces se tiene:

1. $\frac{d}{dt}|_{t=0} S(g_t) = 0 \;\; \forall h$ si y sólo si, $Ric_g = 0$
2. $\frac{d}{dt}|_{t=0} S(g_t) = 0 \;\; \forall h$ con la restricción de $Vol(M) = \int_M dV_t =$ constante si y sólo si (M, g) es un espacio de Einstein, es decir $Ric_g - \frac{S_g}{n} g = 0$
3. $\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{S(g_t)}{(Vol(g_t))^{(n-2)/n}} = 0 \;\; \forall h$ si y sólo si (M, g) es un espacio de Einstein

Observación

El caso para una métrica indefinida g. Como se define en todas las consideraciones en la presentación anterior y así como el corolario anterior, siguen siendo válidad también en el caso más general de una métrica g indefinida. Usando el cálculo de Ricci, no cambia nada en absoluto, ya que se tiene $Tr_g A = A^i_i g^{ji}$

Contenido

De lo visto anteriormente se tiene la siguiente expresión:

$$Ric - \frac{S}{2} g = 0$$

como el "gradiente"del funcional S. Más allá de eso, este tensor juega un papel importante en la teoría general de la relatividad. Allí, este tensor se denomina tensor gravitacional de Einstein. Y en también se sabe que este tensor es libre de divergencias.

Si hay un análogo de la ecuación de Poisson en la relatividad general, entonces esta debe ser una ecuación tensorial para el tensor de potencial gravitacional $g_{\mu\nu}$, en cuyo lado derecho tenemos el tensor de energía de la materia. En el lado izquierdo de la ecuación, necesitamos un tensor diferencial derivado de $g_{\mu\nu}$. El objetivo es determinar este tensor con precisión. Está completamente determinado por las siguientes tres condiciones:

1. El tensor en cuestión no debe contener derivadas superiores a segundas de $g_{\mu\nu}$.
2. El tensor debe depender linealmente de las segundas derivadas.
3. La divergencia del tensor debería desaparecer de forma idéntica.

El tensor de Einstein satisface las tres condiciones y, en cierto sentido, está determinado únicamente por esta propiedad. Las ecuaciones de campo de Einstein son las siguientes:

$$Ric - \frac{S}{2}g = T$$

utilizando la notación para el cálculo de Ricci:

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{S}{2}g_{ij} = T_{ij}$$

Luego Einstein y otros consideran una variante en esta ecuación de campo, al introducir un término llamada constante cosmológica.

$$R_{ij} - \frac{S}{2} g + \Lambda g_{ij} = T_{ij}$$

Contenido

Referencias

1. Kühnel, W. (2013). Curves-Surfaces - Manifolds. Third Edition