Superficies mínimas de Scherk y *Saddle Tower*

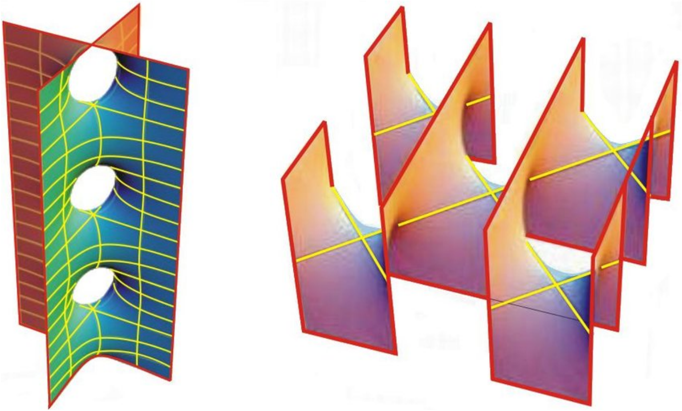
Estuardo Díaz

Universidad del Valle de Guatemala

Table of Contents

Table of Contents

Introducción



Historia

Las dos superficies mínimas de Scherk fueron descubirtas por Heinrich Scherk en 1834. Fueron las primeras superficies mínimas descubiertas después del catenoide y helicoide, descubiertas por Meusnier en 1776.

Historia

En la actualidad, existen varias esculturas de madera de dichas superficies, creadas por Séquin.

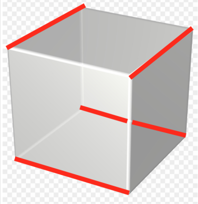
Table of Contents

Origen de la superficie

Consideremos la función $u_n : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, sujeta a las condiciones

$$\lim_{y \to \pm\pi/2} u_n(x, y) = +n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

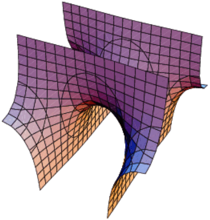
$$\lim_{x \to \pm\pi/2} u_n(x, y) = -n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$



Origen de la superficie

¿Qué pasa si n tiende a infinito?
Scherk demostró en 1843 que el límite cuando n tiende a infinito, $u := \lim_{n\to\infty} u_n$ es una superficie mínima, y está dada por

$$u(x,y) = \log\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right).$$



Ecuación explícita

Luego, en un trabajo conjunto con varios matemáticos, (Osserman 1986, Wells 1991, von Seggern 1993) demostraron que la superficie está definida por la ecuación implícita

$$e^z cosy = cosx$$

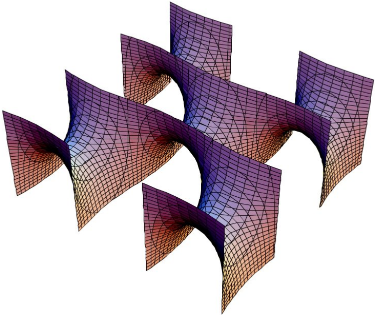
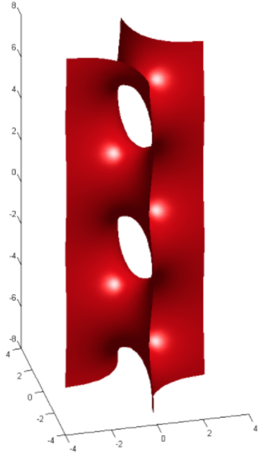


Table of Contents

Parametrizacióin de ls segunda superficie mínima

La segunda superficie de Scherk tiene parametrización implícita

$$\sin(z) - \sinh(x)\sinh(y) = 0$$

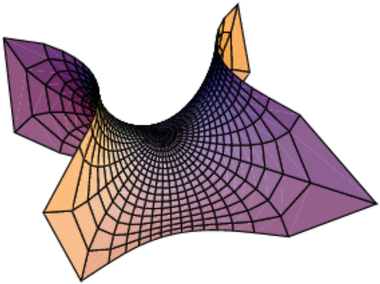


Parametrizacióin de Weierstrass–Enneper parameterization

Además tiene parametrización de Weierstrass–Enneper, por lo que es superficie mínima, con

$$f(z) = \frac{4}{1 - z^4}$$

$$g(z) = iz$$



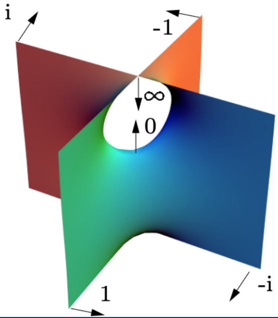
Donde la parametrización de Weierstrass–Enneper está dada por

$$x_k(\zeta) = \Re\left\{\int_0^{\zeta} \varphi_k(z)\,dz\right\} + c_k, \qquad k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1 = f(1 - g^2)/2$$

$$\varphi_2 = \mathrm{i}f(1 + g^2)/2$$

$$\varphi_3 = fg$$



Parametrizacióin

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores tenemos que

$$x = 2\Re[ln(1 + re^{i\theta}) - ln(1 - re^{i\theta})]$$

$$= ln\frac{1 + r^2 + 2rcos\phi}{1 + r^2 - 2rcos\phi}$$

$$y = \Re[4itan^{-1}(re^{i\theta})]$$

$$= \frac{1 + r^2 - 2rsin\phi}{1 + r^2 + 2rsin\phi}$$

$$z = \Re 2i(-ln[1 - r^2e^{2i\theta}] + ln[1 + r^2e^{2i\theta}])$$

$$= 2tan^{-1}\left[\frac{2r^2sin2\phi}{r^4 - 1}\right]$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in (0, 1)$.

Primera forma fundamental

La primera forma fundamental está dada por:

$$E = \frac{16(1 + r^2)^2}{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}$$

$$F = 0$$

$$G = \frac{16r^2(1 + r^2)^2}{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}$$

Nótese que $E = G$ y $F = 0$

Segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental está dada por:

$$e = \frac{8(1 + r^4) sin(2\phi)}{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}$$

$$f = \frac{8(1 - r^4) cos(2\phi)}{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}$$

$$g = \frac{8r^2(1 + r^4) sin(2\phi)}{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}$$

Curvatura de Gauss y curvatura media

La curvatura de Gauss está dada por

$$K = -\frac{1 + r^8 - 2r^4 cos(4\phi)}{4(1 + r^2)^4}$$

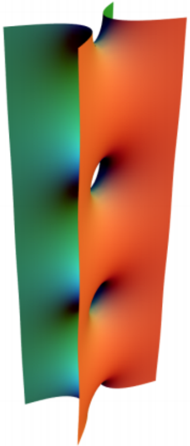
Y la curvatura media es

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = 0$$

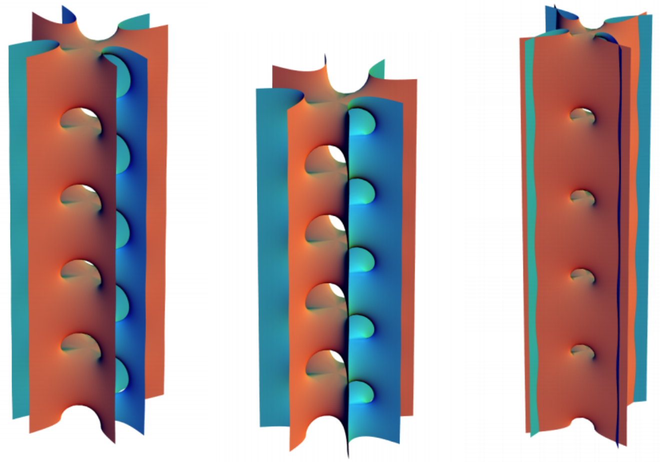
por estar definida por medio de una representación de Weierstrass–Enneper. Además se puede comprobar usando las formas fundamentales.

Table of Contents

Generalizaciones



Generalizaciones



Referencias

- *Classical Minimal Surfaces in Euclidean Space by Examples* Matthias Weber, September 25, 2001. https://minimal.sitehost.iu.edu/research/claynotes.pdf
- https://disk.mathematik.uni-halle.de/history/scherk/index.html
- Weisstein, Eric W. "*Scherk's Minimal Surfaces.*" From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/ScherksMinimalSurfaces.html
- Weisstein, Eric W. "*Enneper-Weierstrass Parameterization.*" From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Enneper-WeierstrassParameterization.html