Superficie de Henneberg y el trinoide

Superficies mínimas

Jose Ramos

Universidad del Valle de Guatemala

Objetivos

1. Presentar la superficie de Henneberg usando el enfoque de Björling.
2. Darnos cuenta de la importancia del análisis complejo y su poder para resolver problemas en geometría diferencial.
3. Presentar el trinoide.

Henneberg

En 1875[4], Henneberg descubrió la superficie como la solución a una superficie mínima que contiene a la curva planar:

$$(z-2)^3 = 9x^2, y = 0 \tag{1}$$

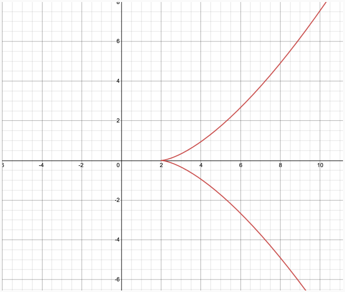

Figura 1: Curva que dio origen al problema
Fuente: elaboración propia

Problema de Björling

Dada una curva $c(t) : I \to R^3$ y una función $n(t) : I \to R^3$ tal que $n(t) \cdot c'(t) = 0$ para todo t, y además $|n(t)| = 1$.
¿Existe una superficie minimal cuya parametrización $x : R^2 \to R^3$ cumple con $x(u, 0) = c(u)$ y también $N(u, 0) = n(u)$? [3]

Dada una curva $c(t) : I \to R^3$ y una función $n(t) : I \to R^3$ tal que $n(t) \cdot c'(t) = 0$ para todo t, y además $|n(t)| = 1$.
¿Existe una superficie minimal cuya parametrización $x : R^2 \to R^3$ cumple con $x(u, 0) = c(u)$ y también $N(u, 0) = n(u)$? [3]

Teorema:
Dadas $c(t), n(t)$ como se describieron anteriormente, existe $x : R^2 \to R^3$ que cumple con los requisitos. Esta parametrización está dada por:

$$x(u, v) = x(w) = Re\left\{c(w) - i\int_{w_0}^{w} n(s) \times c'(s)ds\right\} \tag{2}$$

donde $w = u + iv$ y $n(w), c(w)$ son las continuaciones analíticas de $c(t)$ y $n(t)$.

Teorema:
[2]
Si la curva $c(t) = (a(t), 0, b(t))$ está contenida en el plano xz entonces la parametrización está dada por

$$x(u,v) = \left(Re(a(w)), Im\left(\int_0^w \sqrt{a'(w)^2 + b'(w)^2}dw\right), Re(b(w)\right)$$

donde $w = u + iv$ y se tiene que $a(w), b(w)$ son las continuaciones analíticas de $a(t), b(t)$.

La curva la podemos escribir como $c(t) = \left(\cosh(2t), 0, -\sinh t + \frac{1}{3}\sinh(3t)\right)$. Su continuación analítica es:

$$c(w) = \left(\cosh(2w), 0, -\sinh w + \frac{1}{3}\sinh(3w)\right)$$

La curva la podemos escribir como
$c(t) = \left(\cosh(2t), 0, -\sinh t + \frac{1}{3}\sinh(3t)\right)$. Su continuación analítica es:

$$c(w) = \left(\cosh(2w), 0, -\sinh w + \frac{1}{3}\sinh(3w)\right)$$

Entonces, notemos que $c'(w) = (2\sinh 2w, 0, -\cosh w + \cosh 3w)$ por lo que
$y(u, v) =$

$$\begin{aligned}
&= Im \int \sqrt{\prime(w)^2 + b'(w)^2} dw \\
&= Im \int \sqrt{2\cosh^2 2w - 4 + \cosh^2 w - 2\cosh w \cosh 3w + \cosh^2 3w} dw \\
&= Im \int \sinh 3w + \sinh w dw \\
&= Im \left(\frac{1}{3}\cosh 3w + \cosh w\right) \\
&= \frac{1}{3}\sinh 3u \sin 3v + \sinh u \sin v
\end{aligned}$$

$$x(u,v) = 2\sinh u \cos v - \frac{2}{3}\sinh(3u)\cos(3v) \tag{3}$$

$$y(u,v) = 2\sinh u \sin v + \frac{2}{3}\sinh(3u)\sin(3v) \tag{4}$$

$$z(u,v) = 2\cosh(2u)\cos(2v) \tag{5}$$

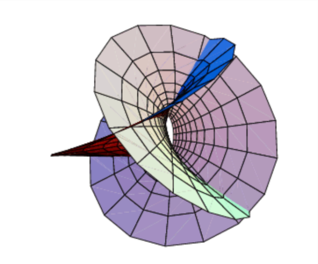

Figura 2: Superficie de Henneberg
Fuente: [4]

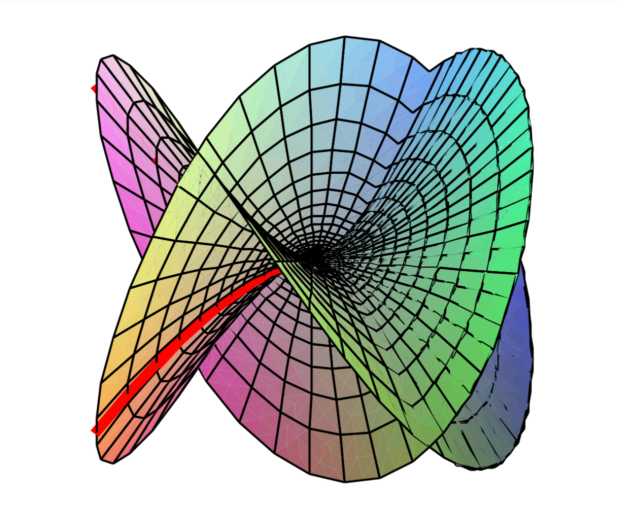

Figura 3: Superficie de Henneberg con la curva

Fuente: [2]

Nótese que

$$x(u,v) = x(-u, v+\pi)$$

$$x_u(u,v) = -x_u(-u, v+\pi)$$

$$x_v(u,v) = x_v(-u, v+\pi)$$

para todo $u + iv \in \mathcal{C}$.
Defínase

$$w(t) = (2t-1, (t-\frac{1}{4})\pi)$$

$$e : [0,1] \to R^3 \ni e(t) = x(w(t))$$

3-NOIDE

1. k-noides
2. Jorge y Meeks en 1983

Figura 4: Trinoide
Fuente: [1]

Parametrización

Usando las funciones $f(z) = \frac{1}{(z^3-1)^2}, g(z) = z^2$ con $f(z)$ analítica y $g(z)$ meromorfa y la representación de Weierstrass se tiene que la parametrización es:

$$x(w) = \frac{1}{2}Re\left\{\left(\frac{-1}{3w\left(w^3-1\right)}\right)\left[(3-1)\left(w^3-1\right)_2 F_1\left(1,-1/3;(3-1)/3;w^3\right)\right.\right.$$
$$-(3-1)w^2\left(w^3-1\right)_2 F_1\left(1,1/3;1+1/3;w^3\right)$$
$$\left.\left.-3w^3+3+w^2-1\right]\right\}$$

$$y(w) = \frac{1}{2}Re\left\{\left(\frac{i}{3w\left(w^3-1\right)}\right)\left[(3-1)\left(w^3-1\right)_2 F_1\left(1,-1/3;(3-1)/3;w^3\right)\right.\right.$$

z(w)=Re$\left\{\frac{1}{3-3w^3}\right\}$

Donde ${}_2F_1(a,b,c;z)$ es la función gaussiana hipergeométrica.

Propiedades

1. Es topológicamente equivalente a la esfera en R^3 con 3 hoyos.
2. $k-$noides
3. Tiene 3 aperturas de catenoide

- K-noid, Sep 2018.
- Kai Wing Fung.
  Minimal surfaces as isotropic curves in $\mathcal{C}^3$: Associated minimal surfaces and the björling's problem, 2004.
- I. Sabitov.
  Bjrling problem, 2012.
- Weisstein.
  Henneberg's minimal surface.