Superficie de Costa y Superficie de Bour

Juan Carlos Menchú Nij

14 de abril de 2021

Contenido

Contenido

Historia

En 1982 Celso Costa descubrió esta superficie. El origen de esto dió a refutar la conjetura de que el plano, la catenoide y el helicoide eran las únicas superficies minimales no periódicas completas, es decir, sin límite.

Superficie

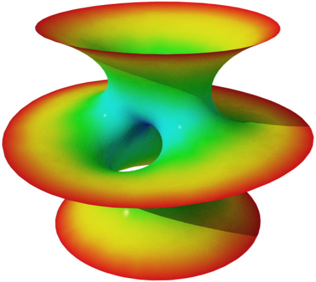

Figura: Superficie de Costa

Contenido

Definición

La superficie mínima de Costa se puede definir por medio de Weierstrass utilizando las funciones f y g definidas por:

$$f(z) = P(z) \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{A}{P'(z)}$$

Además, para que la superficie no tenga auto-intersecciones, se necesita tomar una valor de $A = 2\sqrt{2\pi}e_1 \approx 34{,}466707$

Definición

Definición

La curva mínima de costa es la curva mínima meromórfica $Costa_{min} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ y es la curva mínima definida por:

$$Costa'_{min}(z) = \frac{1}{2}(\frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2), i\frac{f(z)}{2}(1 + g(z)^2), f(z)g(z))$$

donde f y g son funciones definidas por Weierstrass. Y además, tomando la curva como la antiderivada de $costa'_{min}$ con la normalización

$$Costa_{min} = (\frac{1+i}{2}) = (0, 0, 0)$$

Lema

Lema

Para todo z se tiene lo siguiente:

1. $P(z-\frac{1}{2}) - P(z-\frac{i}{2}) - 2e_1 = \frac{16e_1^3 P(z)}{P(z)^2}$
2. $iZ(iz) = Z(z)$
3. $z(\frac{1}{2}) = iZ(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$
4. $z(\frac{1+i}{2}) = \frac{(1-i)\pi}{2}$

donde $P(z) = \mathbb{P}(z, c, 0)$ y $Z(z) = \zeta(z, c, 0)$

Teorema

Teorema

La curva minima de Costa está dada por: $costa_{min}(z) = (x(z), y(z), h(z))$ donde

$$\begin{cases} x(z) & = \frac{1}{2}(-Z(z) + \pi z - i\pi + \frac{\pi^2(1+i)}{4e_1} + \frac{\pi}{2e_1}(Z(z-\frac{1}{2}) - Z(z-\frac{i}{2}))) \\ y(z) & = \frac{i}{2}(-Z(z) - \pi z + \pi - \frac{\pi^2(1+i)}{4e_1} - \frac{\pi}{2e_1}(Z(z-\frac{1}{2}) - Z(z-\frac{i}{2}))) \\ \\ h(z) & = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\log(\frac{P(z)-e_1}{P(z)+e_1} - \pi i)) \end{cases}$$

Demostración

Para probar el teorema se va a utilizando la definición de la curva mínima de Costa. Primero se probará para $w(z)$ para ello se tiene que:

$$f(w)g(w) = \frac{AP(w)}{P'(w)} = \frac{AP'(w)P(w)}{P'(w)^2} = \frac{AP'(w)}{4(P'(w)^2 - e_1^2)}$$

Sacando fracciones parciales se tiene:

$$\begin{aligned} f(w)g(w) &= \frac{A}{8e_1}P'(w)(\frac{1}{P(w)-e_1} - \frac{1}{P(w)+e_1}) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\frac{P'(w)}{P(w)-e_1} - \frac{P'(w)}{P(w)+e_1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando $h(z)$

Demostración

$$h(z) = \int_{\frac{1+i}{2}}^{z} f(w)g(w)dw = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\log(\frac{P(w)-e_1}{P(w)+e_1})|_{\frac{1+i}{2}}^{z}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\log(\frac{P(z)-e_1}{P(z)+e_1} - \pi i)$$

Ahora se probará $x(z) = \frac{1}{2}f(w)(1-g(w)^2) = \frac{1}{2}(P(w) - \frac{A^2 P(w)}{P'(w)^2})$

$$\frac{1}{2}f(w)(1-g(w)^2) = \frac{1}{2}(P(w) - \frac{A^2}{16e_1^3}(P(w-\frac{1}{2}) - P(w-\frac{i}{2}) - 2e_1))$$
$$= \frac{1}{2}(P(w) - \frac{\pi}{2e_1}(P(w-\frac{1}{2}) - P(w-\frac{i}{2} - 2e_i))$$
$$= \frac{1}{2}(P(w) + \pi - \frac{\pi}{2e_1}(P(w-\frac{1}{2}) - P(w-\frac{i}{2})))$$

Demostración

Integrando de $(1+i)/2$ a z

$$\int_{(1+i)/2}^{z} \frac{1}{2}(f(w)(1-g(w)^2 dw =$$
$$= \frac{1}{2}(-Z(w) + \pi w + \frac{\pi}{2e_1}(Z(w-\frac{1}{2}) - Z(w-\frac{i}{2})))|_{(1+i)/2}^{z}$$
$$= \frac{1}{2}(-Z(z) + \pi z + \frac{\pi}{2e_1}(Z(z-\frac{1}{2}) - Z(z-\frac{1}{2})) - i\pi + \frac{\pi^2(1+i)}{4e_1}$$

De manera similar se tiene: $y(z)$

Corolario:

La superficie minima de costa viene dada por:

$$costa(u,v) = (x(u,v), y(u,v), h(u,v))$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) & = \frac{1}{2} Re(-Z(u+iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e_1} + \\ & + \frac{\pi}{2e_1}(Z(u+iv-\frac{1}{2}) - Z(u+iv-\frac{1}{2}))) \\ y(u,v) & = \frac{1}{2} Re(-iZ(u+iv) + \pi v + \frac{\pi^2}{4e_1} - \\ & - \frac{\pi i}{2e_1}(Z(u+iv-\frac{1}{2}) - Z(u+iv-\frac{1}{2}))) \\ h(u,v) & = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \log \left| \frac{P(u+iv)-e_1}{P(u+iv)+e_1} \right| \end{cases}$$

Contenido

Propiedades

1. La superficie de Costa es invariante bajo la acción de una media vuelta alrededor del eje $x = y$, $z = 0$
2. La superficie de Costa es topológicamente equivalente a un toro menos 3 puntos.
3. También es topológicamente muy cerca de la superficie algebraica cúbica con la ecuación cartesiana $(x^2 + y^2 - a)z = z(x^2 - y^2)$ la cual es también invariante a la acción de medio giro que intercambia las dos caras.
4. La superficie de Costa se puede generalizar a una superficie con orden n simetría rotacional.

Contenido

Historia breve

Las superficies mínimas de Bour's se caracterizan por permitir isometrías locales a superficies de revolución. Además, la superficie mínima de Bour es una superficie mínima-bidimensional, incrustada con auto-cruces en el espacio euclidiano-tridimensional. Lleva el nombre de Edmond Bour,cuyo trabajo en superficies mínimas le valió el premio de matemáticas de 1861 de la Academia Francesa de Ciencias.

Superficie

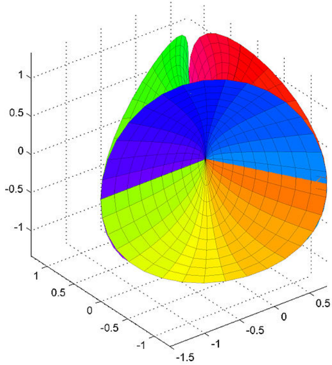

Figura: Superficie de Bour

Contenido

Parametrización

Las superficies mínimas de Bour's se caracterizan por permitir isometrías locales a superficies de revolución. Las parametrizaciones de las superficies en esta familia de un parámetro se obtienen de la formula de Weierstrass, evaluando lo siguiente:

$$f(z) = \sqrt{c}w^{\frac{w}{2}-1} \quad y \quad g(z) = \sqrt{c}w^{\frac{m}{2}}$$

Se tiene entonces que la parametrización de la superficie mínima de Bour:

$$B_m(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = Rec(\frac{1}{m-1}W^{m-1} - \frac{1}{m+1}W^{m+1}) \\ y(u,v) = Rec(\frac{i}{m-1}W^{m-1} + \frac{i}{m+1}W^{m+1}) \\ h(u,v) = Rec(\frac{2}{m}W^{m}) \end{cases}$$

Contenido

Propiedades

1. Entre las superficies de Bour se puede encontrar supeficies mínimas conocidas

Contenido

Referencias

1. Odehnal, B. (2016). On Algebraic Minimal Surfaces.
2. Ferguson, H., Gray, A., Markorsen, St. (1995) Costa's Minimal Surface. Berlin.