Catenoide y Helicoide

Mariana Morales

Catenoide

- Definición: una curva **catenaria** es una curva parametrizada por:
  $\alpha(u) = (u, cosh(u))$

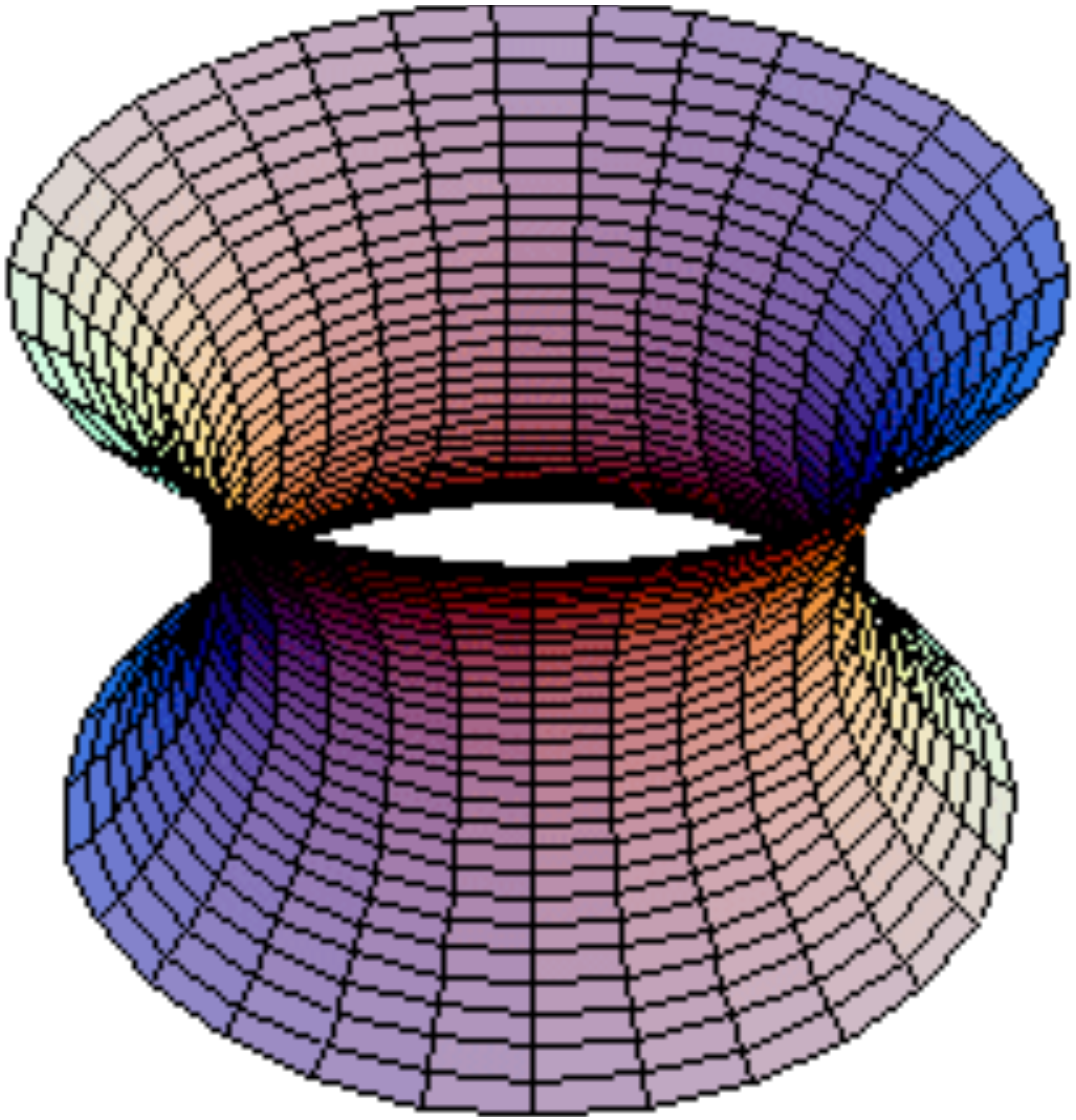
- Definición: el **catenoide** es una superficie generada al rotar alrededor de un eje una curva catenaria.

Historia

- El problema de la catenaria surgió a inicios del siglo XVII, que buscaba describir la forma que una cuerda o cadena tomaba al ser sostenida por sus extremos.
- Se cree que Galileo Galilei pensaba que esta tomaba la forma de una parábola.
- Sin embargo años más tarde Christiaan Huygens, matemático neerlandés, demostró que esta no era una parábola y que esta no podía ser representada por una ecuación algebraica.
- Fue hasta 1691 que la ecuación fue obtenida por Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens y Johann Bernoulli.
- Finalmente en 1744 Leonhard Euler describió formalmente la superficie generada por la curva catenaria en revolución, llamada Catenoide.

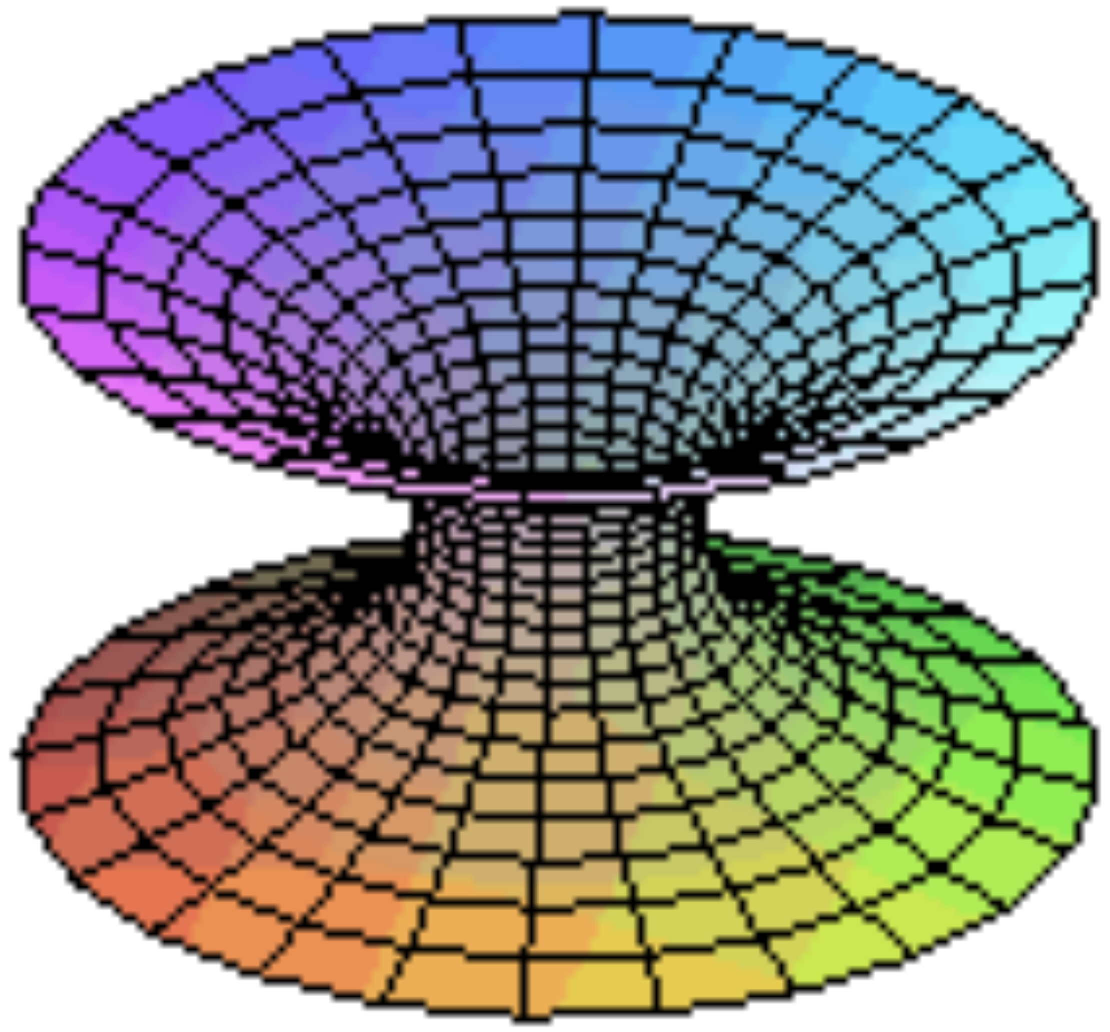
Propiedades

- Es una superficie mínima
- Es la única superficie mínima, sin contar el plano, que es una superficie de revolución
- Es orientable



Parametrización

- $x(u,v) = (u, bcosh(u)cos(v), bcosh(u)sen(v)), v \in [0,2\pi], u \in I$ y b constante.



El catenoide es una superficie mínima

- Demostración: Sea la parametrización $x(u,v) = (u, bcosh(u)cos(v), bcosh(u)sen(v)), v \in [0,2\pi], u \in I$. A probar: es isotérmica. Entonces tenemos que

$$x_u = (1, senh(u)cos(v), senh(u)sen(v)) \text{ y}$$
$$x_v = (0, -cosh(u)sen(v), -cosh(u)cos(v))$$

Entonces

$$x_u \cdot x_v = 1 + senh2(u)cos2(v) + senh2(u)sen2(v) = 1 + senh2(u) = cosh2(u)$$

$$x_v \cdot x_u = 0 + cosh2(u)sen2(v) + cosh2(u)cos2(v) = cosh2(u)$$

$$\Rightarrow x_u \cdot x_v = x_v \cdot x_u = 0$$

A probar: x es armónica.

$$x_{uu} = (0, cosh(u)cos(v), cosh(u)sen(v))$$

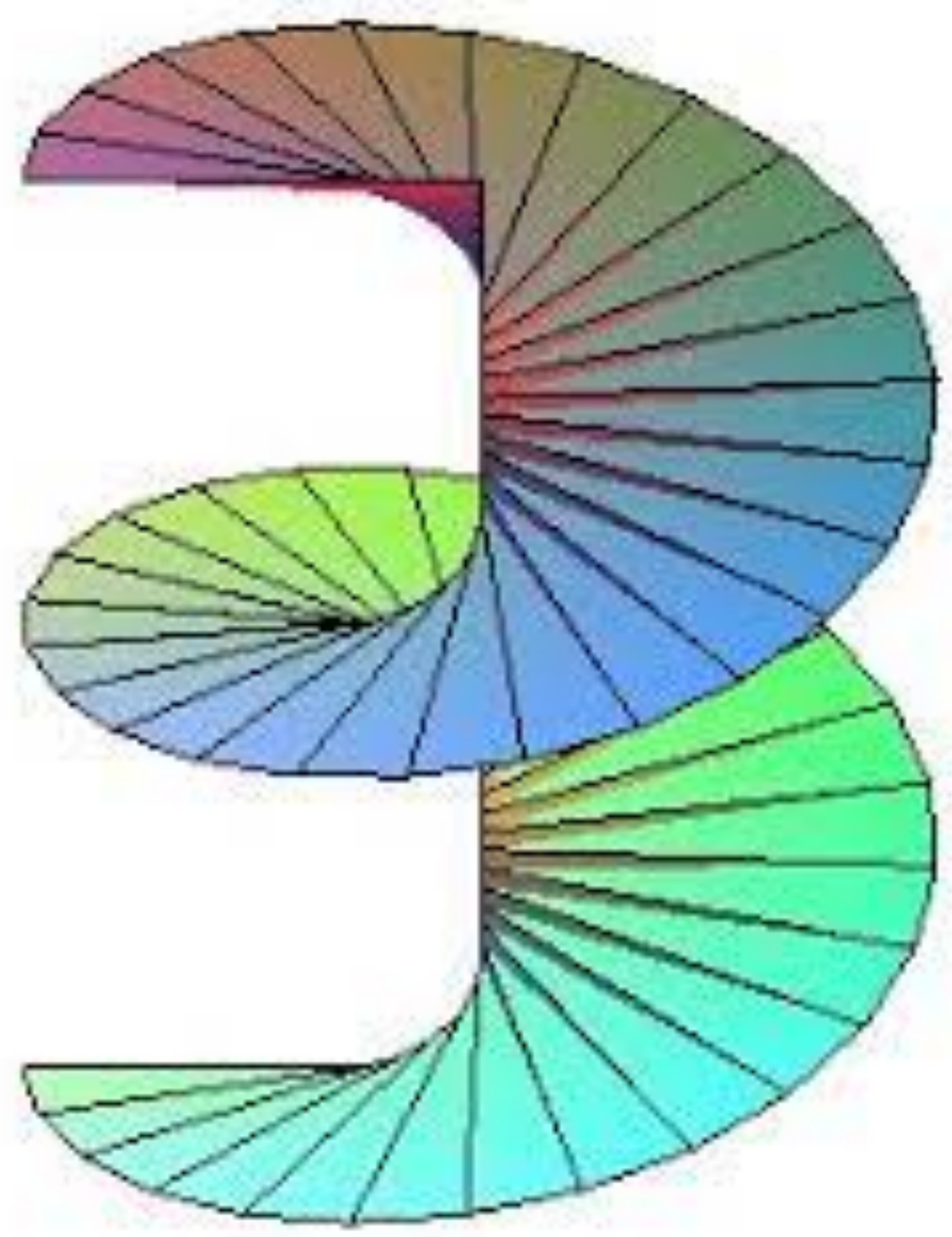
$$x_{vv} = (0, -cosh(u)cos(v), -cosh(u)sen(v))$$

$$\Rightarrow x_{uu} + x_{vv} = 0 \;\; \therefore H = 0 \blacksquare$$

Helicoide

- Definición: El **helicoide** es una superficie reglada generada por las rectas que pasan por la hélice circular y por su eje, sobre el que inciden siempre perpendicularmente.

.

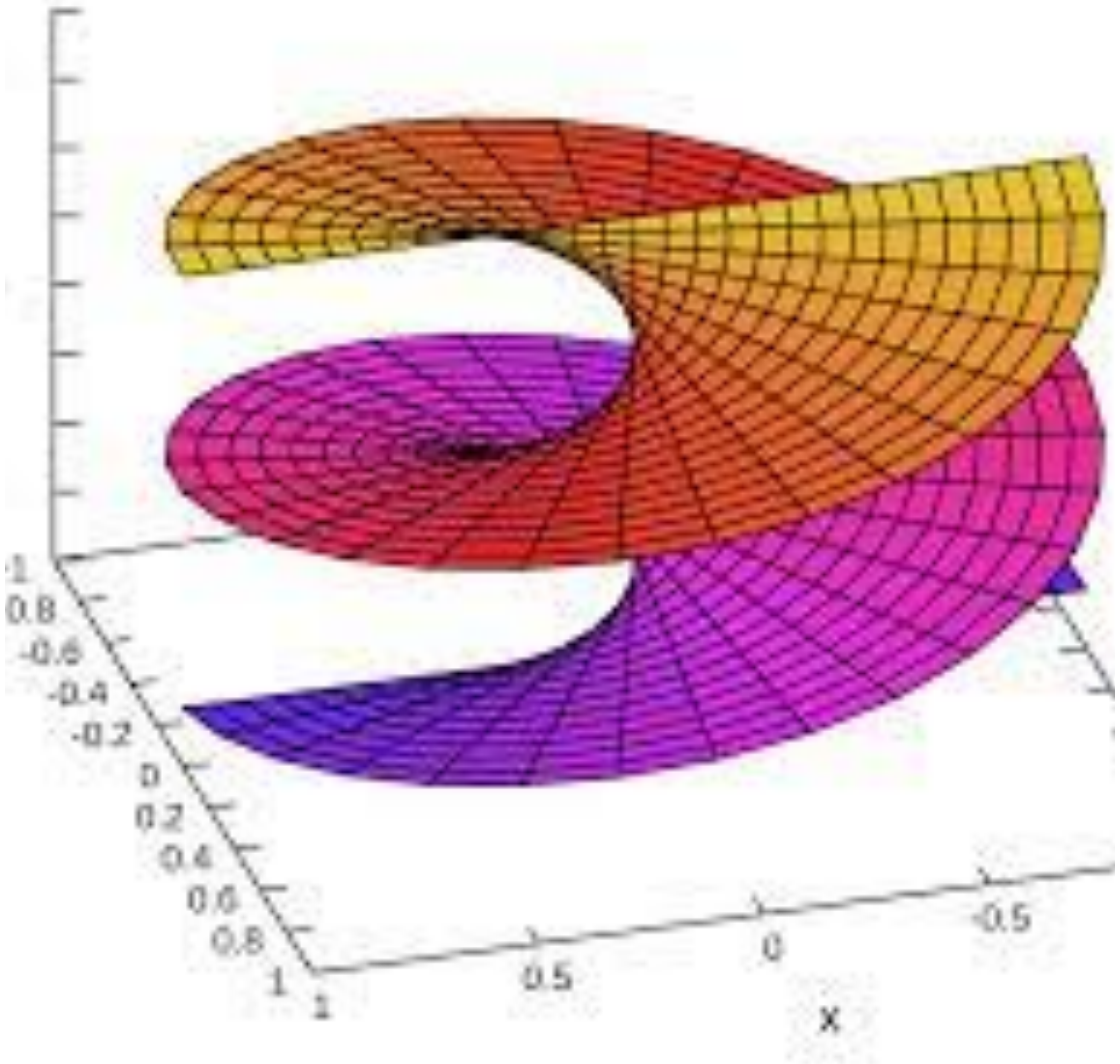


Historia

- Fue descrito por primera vez por Leonhard Euler en 1774
- Su nombre se deriva de la similitud hélice
- En 1842 Eugène Charles Catalan demostró que el helicoide y el plano son las únicas superficies regladas mínimas.

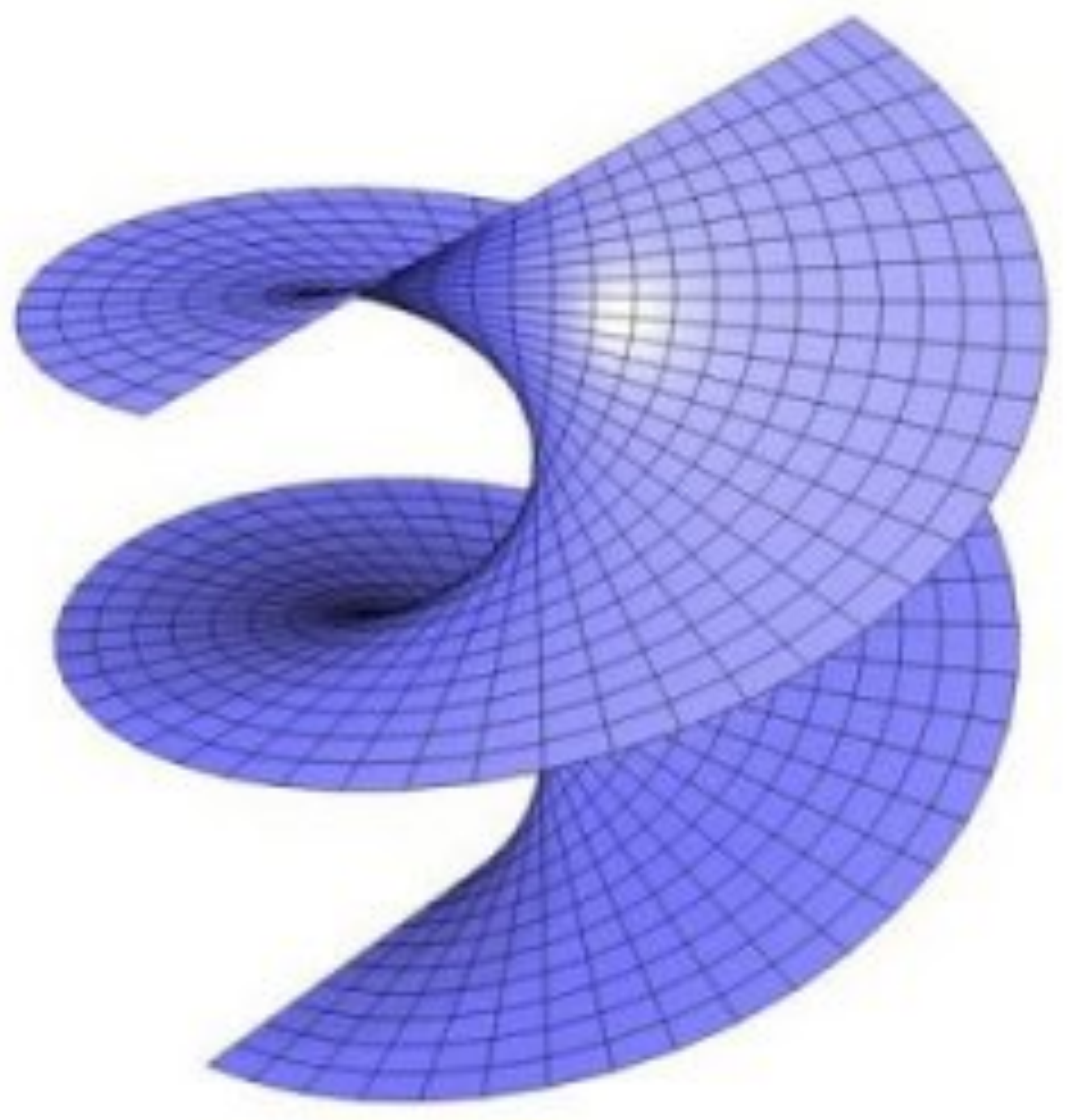
Propiedades

- Es una superficie mínima
- Es la única superficie mínima, sin contar el plano, que es reglada



Parametrización

- $x(u, v) = (v cos(u), v sen(u), au)$ con $a \in \mathbb{R}$



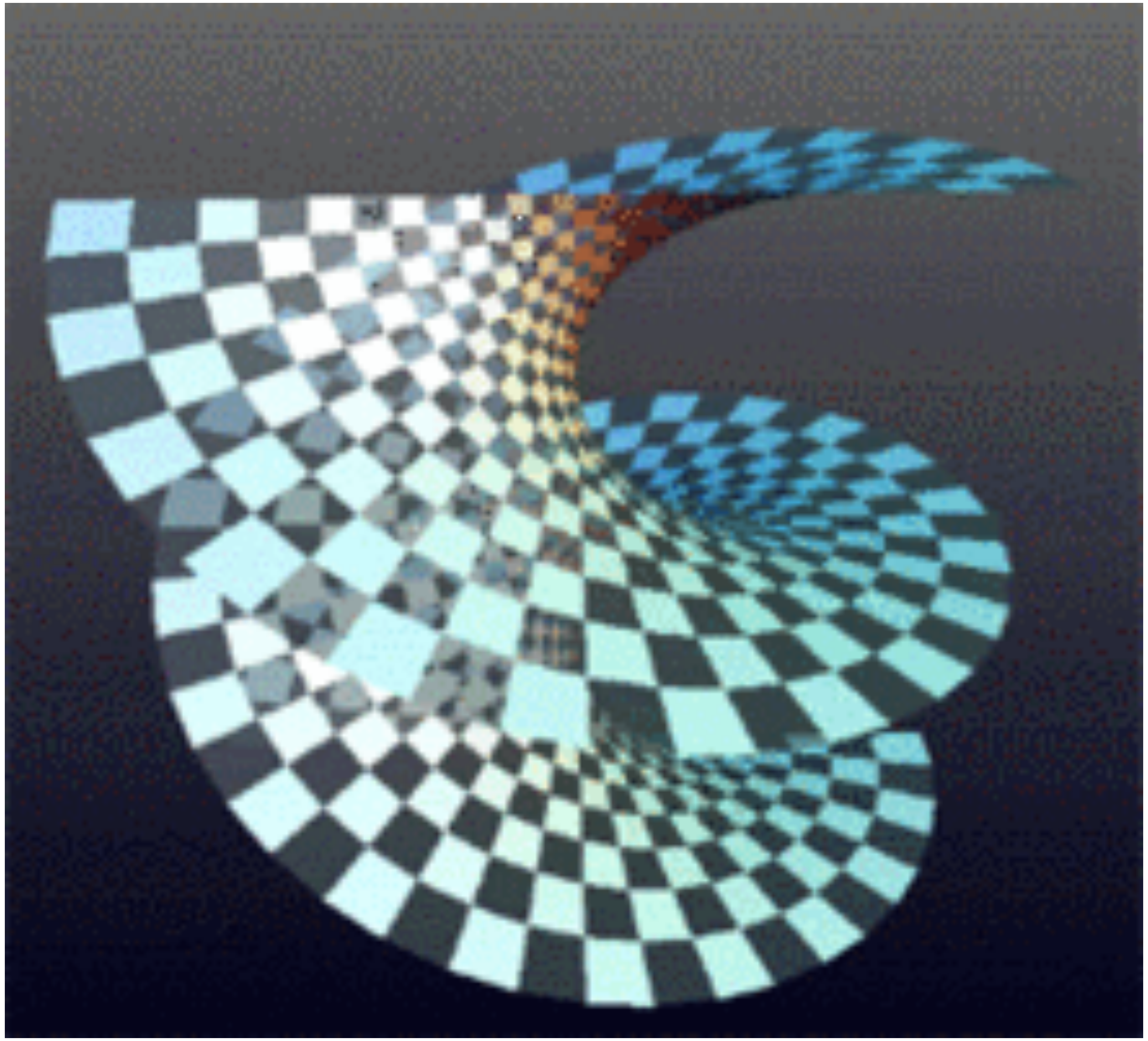
El Helicoide es una superficie mínima

- Demostración: Sea la primera forma fundamental: $x_u \cdot x_u = v^2 + a^2, x_v \cdot x_v = 1$

$x_u \cdot x_v = 0$ y las segundas derivadas: $x_{uu} = (-vcos(u), -vsen(u), 0)$,
$x_{vv} = (0,0,0)$, $x_{uv} = (-sen(u), cos(u), 0)$. Entonces

$$H = \frac{(-vcos(u), -vsen(u), 0) \cdot (-sen(u), cos(u), -v)}{2g} = 0 \blacksquare$$

- El helicoide y catenoide son superficies isométricas.



El helicoide y catenoide son superficies isom