Geometría Diferencial 2021

Lista 05

11.mayo.2021

1. Mostrar la **ecuación de Gauss**. Si S es una superficie con parametrización ortogonal, $F = 0$, entonces
$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\Big[\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\Big)\Big].$$

2. a) Pruebe que toda superficie regular compacta S posee un punto elíptico.
   b) Muestre que toda superficie regular compacta S, con característica $\chi(S) \leq 0$ posee un punto hiperbólico.

3. Compruebe que no existe superficie $\mathbf{x}(u, v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$ y que $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

4. Justifique por qué las superficies siguientes no son localmente isométricas dos a dos:
   a) la esfera S^2,
   b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$,
   c) la silla $z = x^2 - y^2$.

5. a) Dar la expresión para la ecuación de las geodésicas sobre el toro $\mathbb{T}^2$, con la parametrización usual
$$\mathbf{x}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big), \quad R > r > 0,\ u, v \in (0, 2\pi).$$
   b) Considere las curvas $\alpha(t) = \mathbf{x}(a, bt)$ y $\beta(t) = \mathbf{x}(at, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Determinar para qué valores de a, b estas curvas son geodésicas.

   Obs! No son las únicas geodésicas sobre el toro. El siguiente documento ilustra todas las familias de las geodésicas sobre $\mathbb{T}^2$.
   `http://www.rdrop.com/~half/math/torus/torus.geodesics.pdf`

6. Leer el punto 7, al final de la sección 4.5 del libro de Do Carmo (pp. 283–286). Entender el material, y probar el **Teorema del Índice de Poincaré**:
   La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable X con puntos singulares sobre una superficie compacta S, es igual a la característica de Euler de S, esto es
$$\sum_{\mathbf{p}\in S} I\big(X(\mathbf{p})\big) = \chi(S).$$