Geometría Diferencial 2021

Lista 03

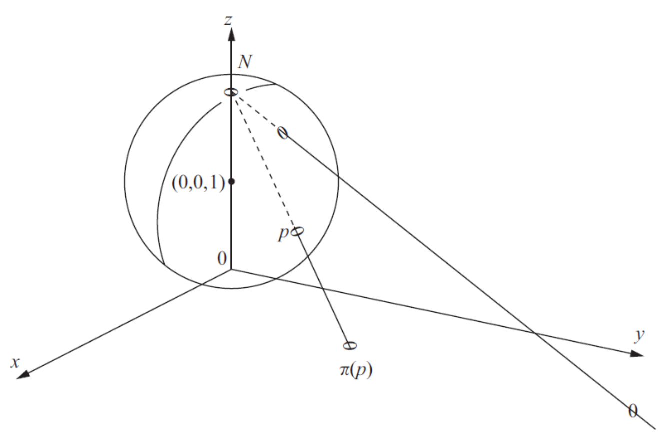
03.marzo.2021

1. Mostrar que la ecuación del plano tangente en $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ a una superficie regular $S : f(x, y, z) = 0$, con 0 un valor regular de f es
$$f_x(\mathbf{p})(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})(z - z_0) = 0.$$
¿Cómo queda la ecuación del plano tangente en el caso de una superfície regular de la forma $z = f(x, y)$?

2. Pruebe que las normales a una superficie parametrizada de la forma
$$\mathbf{x}(u, v) = \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big), \quad f(u) \neq 0,\ g'(u) \neq 0,$$
pasan todas por el eje Oz.

3. Un punto crítico de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular S es un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $Df(\mathbf{p}) = 0$.
   a) Si $f : S \to \mathbb{R}$ es dada por $f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$, con $\mathbf{p}_0 \notin S$, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de f si, y sólo si, la recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0$ es normal a S.
   b) Si $h : S \to \mathbb{R}$ es dada por $h(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de f si, y sólo si, $\mathbf{v}$ es un vector normal a S en $\mathbf{p}$.

4. Obtenga la primera forma fundamental de la parametrización de la esfera S^2 dada por la proyección estereográfica.



5. Muestre que el área A de una región limitada R sobre la superficie $z = f(x, y)$, con f diferenciable, es
$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$
donde Q es la proyección ortogonal de R sobre el plano Oxy.

6. Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de S constituyen una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

   a) Pruebe una condición necesaria y sufieciente para que esto suceda es que

   $$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

   b) Mostrar que si las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar la vecindad coordenada de tal forma que $E = 1$, $F = \cos\theta$ y $G = 1$.

7. Sea S una superficie de revolución y $C : I \to \mathbb{R}^2$ su curva generatriz (en el plano Oxz). Sea s la longitud de arco de la curva, y denotamos por $\rho = \rho(s)$ la distancia del punto correspondiente $C(s)$ al eje de rotación.

   a) Mostrar el Teorema de Pappus: El área de S está dada por

   $$A = 2\pi \int_0^L \rho(s)\, ds,$$

   donde L es la longitud de la curva C.

   b) Aplicar la parte (a) para calcular el área de la superficie de un toro.

8. El *gradiente* de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es la aplicación diferenciable $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in S$ un vector $\nabla f(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$ tal que

   $$\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{p}} = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

   Demuestre que si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, entonces el gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x}(U)$ está dado por

   $$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v.$$

   En particular, si $S = \mathbb{R}^2$, con coordenadas x, y, entonces

   $$\nabla f = f_x \mathbf{e}_1 + f_y \mathbf{e}_2.$$

9. La orientación puede no ser preservada por difeomorfismos.
   Sea $\varphi : S_1 \to S_2$ un difeomorfismo entre superficies.

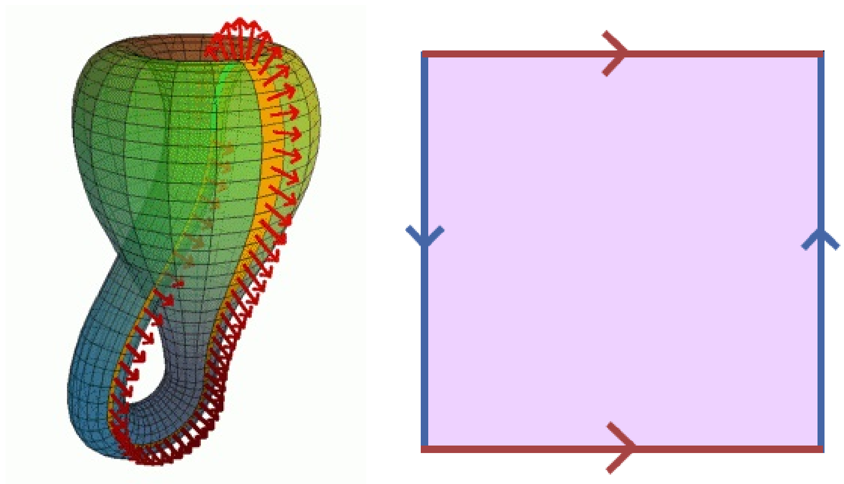
   a) Muestre que S_1 es orientable si, y sólo si, S_2 es orientable.

   b) Considera la aplicación antípoda $\varphi : S^2 \to S^2$ dada por $\varphi(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Utilizar esta aplicación para mostrar que en (a), la orientación inducida por φ puede ser distinta de la original.

10. Mostrar que la botella de Klein $\mathbb{K}$ no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:

    $$\mathbb{K} = [0,1] \times [0,1] \;/\sim, \quad \text{donde } (u,0) \sim (u,1), \text{ y } (0,v) \sim (1, 1-v),$$

    u otro modelo similar, como se ilustra en la Figura 1.



$\mathbb{K}$

Figure 1: Botella de Klein. (a) como superficien en $\mathbb{R}^3$, (b) como espacio cociente.