Geometría Diferencial 2021

Lista 02

17.febrero.2021

1. Mostrar que el cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$ es una superficie regular, y encuentre parametrizaciones que cubran dicha superficie. Mostrar que el cono $C: x^2+y^2=z^2$ no es superficie.

2. Sea $f(x,y,z)=z^2$. Muestre que 0 no es un valor regular de f y que aún así, $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.

3. Sea $f(x,y,z)=(x+y+z-1)^2$.

   a) Localizar los puntos críticos y valores críticos de f.

   b) ¿Para qué valores de c e conjunto $f(x,y,z)=c$ es una superficie regular?

   c) Responder las preguntas en (a) y (b) para la función $g(x,y,z)=xyz^2$.

4. Probar que $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

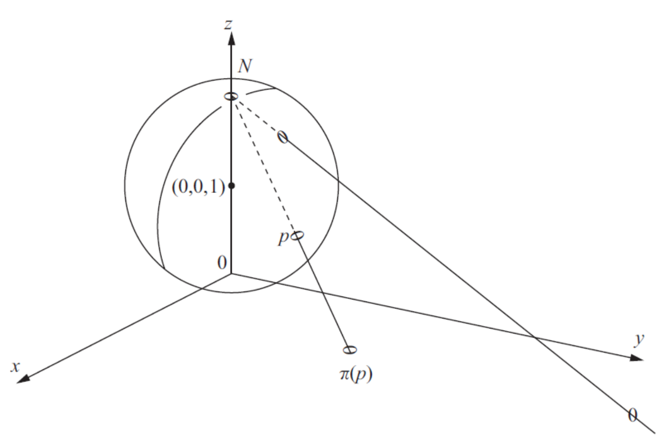
$$\mathbf{x}(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad a,b,c \neq 0,$$

   con $0<u<\pi, 0<v<2\pi$, es una parametrización para el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
   Describir geométricamente las curvas $u=const.$ sobre el elipsoide.

5. Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera S^2, dada por $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, es considerar la **proyección estereográfica** $\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ que lleva el punto $\mathbf{p}=(x,y,z)$ en la esfera S^2 menos el polo norte $N=(0,0,2)$ sobre la intersección del plano xy con la recta que conecta N con $\mathbf{p}$ (Fig. abajo). Sea $(u,v)=\pi(x,y,z)$, donde $(x,y,z) \in S^2 - \{N\}$ y $(u,v) \in$ plano xy.

   a) Pruebe que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ está dada por

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \quad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \quad z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}.$$



   b) Muestre que es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos cartas locales.

6. Sea $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la esfera unitaria y sea $A : S^2 \to S^2$ el mapa antipodal $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Pruebe que A es un difeomorfismo.

7. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ el mapa que toma cada punto $\mathbf{p} \in S$ y lo lleva a su proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Es π diferenciable?

8. a) Mostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano.

   b) Construir un difeomorfismo entre el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y la esfera unitaria $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. Defina una curva regular en analogía con una superficie regular. Demostrar lo sigueinte:

   a) La imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una curva plana regular. Dé un ejemplo de tal curva que sea no conexa.

   b) La imagen inversa de un valor regular de un mapa diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una curva regular en $\mathbb{R}^3$. Muestre la relación entre esta proposición y la forma clásica de definir una curva en $\mathbb{R}^3$ como la intersección de dos superficies.

   c) El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\}$ no es una curva regular.

10. a) Sea C una curva regular y sean $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to C$, $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \to C$ dos parametrizaciones de C en una vecindad de $\mathbf{p} \in \alpha(I) \cap \beta(J) = W$. Sea $h = \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \to \alpha^{-1}(W)$ el cambio de coordenadas. Probar que h es un difeomorfismo.

    b) Defina la noción de función diferenciable en una curva regular, incluyento todas las hipótesis necesarias.

    c) Muestre que el mapa $E : \mathbb{R} \to S^1$ dado por

$$E(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

    es diferenciable (geométricamente, E “envuelve” la recta real $\mathbb{R}$ alrededor de S^1).