Formas Diferenciales

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 33) 21.mayo.2021

Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Ya vimos que un **campo vectorial** en $\mathbb{R}^n$ es un mapa que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, un vector $v(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ de la forma

$$v(\mathbf{p}) = \textstyle\sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{p}) \, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}},$$

donde $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones. Decimos que v es **diferenciable** si las v_i son funciones diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A cada espacio tangente asociamos su espacio dual $(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})^* = L(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}, \mathbb{R})$. La base canónica de este espacio dual es $(dx_1)_{\mathbf{p}}, \ldots, (dx_n)_{\mathbf{p}}$, donde

$$(dx_i)_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}\Big) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i{=}j; \\ 0 & i{\neq}j. \end{cases}$$

Extendemos la noción de campo al espacio dual.

Definición

*Un **campo de formas lineales** o una **forma exterior de grado 1** en $\mathbb{R}^n$ es un mapa ω que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(\mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})^*$, en la forma*

$$\omega(\mathbf{p}) = \textstyle\sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{p})\, dx_i|_{\mathbf{p}},$$

*con $\omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones. Si las ω_i son todas diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, decimos que ω es una **forma diferencial de grado 1** o una **1-forma**.*

El espacio $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}, \mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R} : \ \varphi$ es bilineal$\}$ tiene la base

$$\{dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_j|_{\mathbf{p}} : \ i, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El conjunto $\Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}) = \{\varphi : \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R} : \ \varphi$ es bilineal y alternada$\}$, esto es $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$. $\Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$ es subespacio vect. de $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}, \mathbb{R})$.

Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Cuando $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})^*$, definimos un elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$ por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Denotamos el elemento $(dx_i)_{\mathbf{p}} \wedge (dx_j)_{\mathbf{p}} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$ por $(dx_i \wedge dx_j)_{\mathbf{p}}$. En este caso, $\{(dx_i \wedge dx_j)_{\mathbf{p}} : i < j\}$ es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$, y se tiene

$$(dx_i \wedge dx_j)_{\mathbf{p}} = -(dx_j \wedge dx_i)_{\mathbf{p}}, \ \forall i \neq j, \qquad (dx_i \wedge dx_i)_{\mathbf{p}} = 0, \ \forall i.$$

Definición

Un ***campo de formas bilineales*** *o una* ***forma exterior de grado 2*** *en $\mathbb{R}^n$ es un mapa ω que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(\mathbf{p}) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$, en la forma*

$$\omega(\mathbf{p}) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(\mathbf{p})\,(dx_i \wedge dx_j)_{\mathbf{p}},$$

con $\omega_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones. Cuando ω_{ij} son todas diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, decimos que ω es una **forma diferencial de grado 2** o una **2-forma**.

Definimos $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}) = \{\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R} : \ \varphi$ es multilineal alternada$\}$.

- *multilineal* significa que es lineal en cada una de las entradas.
- *alternada* significa que $\varphi(\ldots, v, w, \ldots) = -\varphi(\ldots, w, v, \ldots)$, cambia de signo al permutar dos entradas consecutivas.

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$ es subespacio vect. de $L^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}, \mathbb{R})$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in (\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})^*$, obtenemos un elemento $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$ por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Se sigue de las propiedades de los determinantes, que $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ es k-lineal y alternada. En particular,

Proposición

$$\{(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_{\mathbf{p}} : i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \text{ es una base para } \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}),$$

y se tiene que $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}) = \binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$.

Definición

*Una **forma exterior de grado** k en $\mathbb{R}^n$ es un mapa ω que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(\mathbf{p}) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})$, en la forma*

$$\omega(\mathbf{p}) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{p})\,(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_{\mathbf{p}} = \sum_{|I|=k} \omega_I(\mathbf{p})\, dx_I|_{\mathbf{p}}.$$

Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Las $\omega_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones. Si las ω_I son todas diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, decimos que ω es una **forma diferencial de grado k** o una **k-forma**.

Por conveniencia, omitimos la dependencia del punto $\mathbf{p}$, y escribimos simplemente $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, tenemos

- 0-formas: las funciones $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- 1-formas: $a_1 \, dx_1 + a_2 \, dx_2 + a_3 \, dx_3$.
- 2-formas: $a_{12} \, dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} \, dx_1 \wedge dx_3 + a_{23} \, dx_2 \wedge dx_3$.
- 3-formas: $a_{123} \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Definición

Si $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$, $\varphi = \sum_I \varphi_I \, dx_I$ *son* k*-formas en* $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Vale*

$$\omega + \varphi = \sum_I (\omega_I + \varphi_I) \, dx_I, \qquad c\omega = \sum_I c\omega_I \, dx_I, \qquad f\omega = \sum_I f\omega_I \, dx_I.$$

Definición (Producto Exterior)

Sea $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *una* k*-forma,* $\varphi = \sum_J \varphi_J \, dx_J \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ *una* s*-forma. El* ***producto exterior*** *de* ω *y* φ *es la* $(k+s)$*-forma en* $\mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} \omega_I \, \varphi_J \, dx_I \wedge dx_J,$$

donde si $I = (i_1, \ldots, i_k)$ y $J = (j_1, \ldots, j_s)$, entonces

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s}.$$

Ejemplo: Sea $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3$ y $\varphi = x_1\,dx_1 \wedge x_2 + dx_1 \wedge dx_3$ una 1-forma y una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= (x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3) \wedge (x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \\
&= x_1^2(dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2) + x_1(dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3) + x_1x_2(dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2) \\
&\quad + x_2(dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3) + x_1x_3(dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2) + x_3(dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3) \\
&= x_2(dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3) + x_1x_3(dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2) \\
&= (x_1x_3 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Obs! La definición del producto exterior está construida de tal forma que si $\varphi, \ldots, \varphi_k$ son k-formas, el producto exterior $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ coincide con la k-forma anteriormente definida

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Obs! Aunque $dx_i \wedge dx_i = 0$, $\forall i$, en general no vale que $\omega \wedge \omega = 0$. Por ejmplo, la 2-forma $\omega = x_1\, dx_1 \wedge dx_2 + x_2\, dx_3 \wedge dx_4$ en $\mathbb{R}^4$, satisface

$$\omega \wedge \omega = (2x_1x_2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Proposición (Propiedades del Producto Exterior)

Sean ω una k-forma, φ una s-forma, y θ una r-forma en $\mathbb{R}^n$. Valen

- $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$.
- $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}\, (\varphi \wedge \omega)$.
- *Si $r = s$, entonces* $\omega \wedge (\varphi + \theta) = (\omega \wedge \varphi) + (\omega \wedge \theta)$.

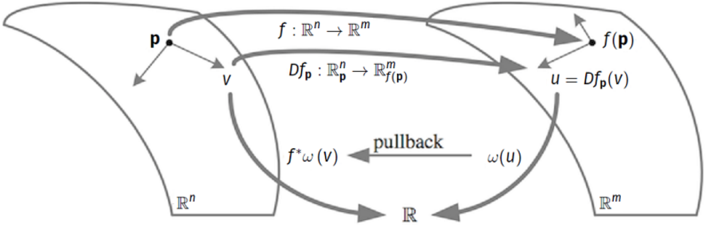
Pullback

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Entonces f induce un mapa $f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ que toma k-formas en $\mathbb{R}^m$ a k-formas en $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, y sea $Df_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}^m_{f(\mathbf{p})}$ la diferencial de f en $\mathbf{p}$. Si $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ es una k-forma. El ***pullback*** *de ω* ***bajo*** *f es la k-forma en $\mathbb{R}^n$*

$$f^*(\omega)(\mathbf{p})\,(v_1, \ldots, v_n) = \omega(f(\mathbf{p}))\,\big(Df_{\mathbf{p}}(v_1), \ldots, Df_{\mathbf{p}}(v_k)\big).$$



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Por convención, si g es una 0-forma, entonces $f^*g = g \circ f$.

Proposición (Propiedades del Pullback)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, sean $\omega, \varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ k-formas y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una 0-forma. Valen

- $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$,
- $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$,
- *Si $\varphi, \ldots, \varphi_k$ son 1-formas* $f^*(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge f^*(\varphi_k)$.

Pullback

Intrepretación de f^*: (*pullback* = cambio de variables)

Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$, y $(y_1, \ldots, y_m)$ coordenadas para $\mathbb{R}^m$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función diferenciable, con

$$f = (f_1, \ldots, f_m), \qquad y_j = f_j = f_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Como $f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v)$, entonces si $\omega = \sum_I \omega_I \, dy_I$ es una k-forma en $\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*\Big(\sum_I \omega_I \, dy_I\Big) = f^*\Big(\sum_I \omega_I \, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}\Big) \\ &= \sum_I f^*(\omega_I) \left(f^* dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge f^* dy_{i_k}\right) \\ &= \sum_I \omega_I(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \left(df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}\right)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ejemplo: (Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$)

Sea ω la 1-forma en $V = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por

$$\omega = -\tfrac{y}{x^2+y^2}\,dx + \tfrac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto $U = \{(r,\theta) : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} = V$, y considere el mapa $f : U \to \mathbb{R}^2$

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y).$$

Calculamos $f^*\omega$. Como

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \\ dy &= \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f^*\omega = -\tfrac{r\sin\theta}{r^2}(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) + \tfrac{r\cos\theta}{r^2}(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = d\theta.$$

Operaciones con Formas Diferenciales

Propiedad

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un mapa diferenciable.*

- $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$, *para cualesquiera formas* ω, φ.
- *Si* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *es otro mapa diferenciable, entonces* $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$.

La diferencial: Recordemos que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable (0-forma), su diferencial es

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Queremos definir una operación para k-formas, que generalize el concepto de diferencial de una función.

Definición

Sea $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$ una k-forma en $\mathbb{R}^n$. La ***diferencial exterior*** *o* ***derivada exterior*** *de ω se define como*

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I.$$

Ejemplo: Sea $\omega = xyz\,dx + yz\,dy + (x+z)\,dz$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x+z) \wedge dz \\
&= (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) \wedge dx + (z\,dy + y\,dz) \wedge dy + (dx + dz) \wedge dz \\
&= xz\,(dy \wedge dx) + xy\,(dz \wedge dx) + y\,(dz \wedge dy) + (dx \wedge dz) \\
&= -xz\,dx \wedge dy + (1 - xy)\,dx \wedge dz - y\,dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Proposición (Propiedades de la Diferencial Exterior)

Sean $\omega, \omega_1, \omega_2$ *k-formas,* φ *una s-forma.*

(a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

(b) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$.

(c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

(d) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, y sea $\omega = \sum_i \omega_i \, dx_i$ una 1-forma sobre U. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva diferenciable (por pedazos) sobre la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ de $[a, b]$. En casa subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, tenemos que γ^* es la 1-forma sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\gamma^*\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \, \frac{\partial x_i}{\partial t} \, dt,$$

donde $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Definimos

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{r} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma|_j^* \omega = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big) \, dt.$$

Integrales de Línea

Decimos que ω es **cerrada** si $d\omega = 0$, y decimos que ω es **exacta** en $V\ subseteqU$ si existe una función $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$.

Si $\eta = df$ es exacta en V, y $\gamma : [a, b] \to V$ es una curva diferenciable, entonces

$$\int_\gamma \eta = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial\gamma} f.$$

Reescribiendo $f = \omega$, tenemos el caso más simple del Teorema de Stokes

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega.$$

Referencia: Do Carmo. *Differential Forms*.