El Espacio Tangente

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 32) 19.mayo.2021

Vectores Tangentes

Queremos definir vectores tangentes sobre una variedad suaves M.

Recordemos que si $\mathbf{v}$ es un vector tangente a $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{p}$, este nos permite calcular derivadas direccionales de funciones: si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}.$$

Esta operación es lineal sobre $\mathbb{R}$ y satisface la regla del producto

$$D_{\mathbf{v}}\,(fg)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, D_{\mathbf{v}}\, g(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})\, D_{\mathbf{v}}\, f(\mathbf{p}).$$

Si $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$, entonces la regla de la cadena se escribe como

$$D_{\mathbf{v}}\, f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

$\Rightarrow D_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. *Un mapa* $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *se llama una* ***derivación*** *en* $\mathbf{p}$ *si es lineal sobre* $\mathbb{R}$, *y satisface*

$$w(fg) = f(\mathbf{p})\, w(g) + g(\mathbf{p})\, w(f).$$

Denotamos por $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las derivaciones en $\mathbf{p}$. Observe que $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial bajo las operaciones

$$(w_1 + w_2)(f) = w_1(f) + w_2(f), \quad \text{y} \quad (cw_1)(f) = c\,(w_1 f).$$

Lo más interesante es que $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ es finito-dimensional y que es isomorfo al espacio geométrico de vectores tangentes $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$.

Lema (Propiedades de las derivaciones)

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $w \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$, *y sean* $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*

(a) *Si* f *es constantes, también lo es* $w(f)$.

(b) *Si* $f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) = 0$, *entonces* $w(fg) = 0$.

Proposición

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Para cada vector geométrico* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, *el mapa de derivada direccional* $D_{\mathbf{v}} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, *es una derivación.*

(b) *El mapa* $\mathbf{v} \to D_{\mathbf{v}}$ *es un isomorfismo de* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ *sobre* $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$.

(c) *Las derivaciones* $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{p}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\mathbf{p}}$, *con* $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$, *son base para* $T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$

Vectores Tangentes

Ahora podemos definir vectores tangentes sobre variedades.

Definición

*Sea M una variedad suave, $\mathbf{p} \in M$. Un mapa lineal $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una **derivación** en $\mathbf{p}$ si*

$$v(fg) = f(\mathbf{p})\, v(g) + g(\mathbf{p})\, v(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

*El conjunto de todas las derivaciones en $\mathbf{p}$ se denota por $T_{\mathbf{p}}M$, y se llama el **espacio tangente** a M en $\mathbf{p}$. Los elementos de $T_{\mathbf{p}}M$ se llaman **vectores tangentes** a M en $\mathbf{p}$.*

- Si M es una n-variedad suave, entonces $T_{\mathbf{p}}M$ es de dimensión n, y es isomorfo a $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$.

La Diferencial

Sean M y N variedades suaves (con o sin frontera), y sea $f : M \to N$ un mapa suave. Para cada punto $\mathbf{p} \in M$, definimos un mapa

$$Df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{f(\mathbf{p})}N,$$

llamado la **diferencial** de f en $\mathbf{p}$, de la siguiente forma: Dada $v \in T_{\mathbf{p}}M$, hacemos $Df_{\mathbf{p}}(v)$ a la derivación en $f(\mathbf{p})$ que actúa sobre $g \in C^\infty(N)$ por la regla

$$Df_{\mathbf{p}}(v)\,(g) = v(g \circ f).$$

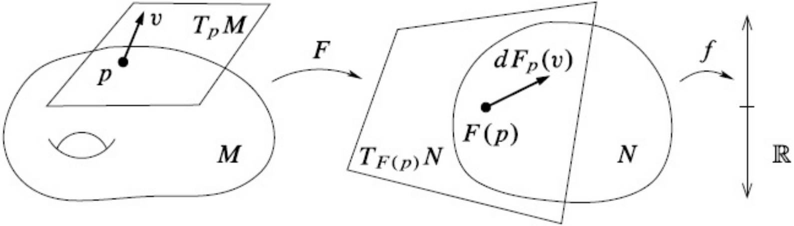
(esto es lo que se llama el *pushforward* de v bajo f).

Observe que si $g \in C^\infty(N)$, entonces $g \circ f \in C^\infty(M)$, de modo que $v(g \circ f)$ hace sentido. El operador $Df_{\mathbf{p}}(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ es lineal, ya que v es lineal.

La Diferencial

Además, $Df_{\mathbf{p}}(v)$ es una derivación, ya que para cualesquiera $g, h \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} Df_{\mathbf{p}}(v)\,(gh) &= v((gh)\circ f) = v((g\circ f)(h\circ f)) = g(f(\mathbf{p}))\,v(h(f)) + h(f(\mathbf{p}))\,v(g(f)) \\ &= g(f(\mathbf{p}))\,Df_{\mathbf{p}}(v)(h) + h(f(\mathbf{p}))\,Df_{\mathbf{p}}(v)(g). \end{aligned}$$



La diferencial.

Proposición (Propiedes de la Diferencial)

Sean M, N, P variedades suaves, $\mathbf{p} \in M$, y sean $f : M \to N$, $g : N \to P$ mapas suaves entre variedades. Entonces

(a) $Df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{f(\mathbf{p})}N$ *es lineal.*

(b) $D(g \circ f)_{\mathbf{p}} = (Dg_{f(\mathbf{p})}) \circ Df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{(g \circ f)(\mathbf{p})}P$.

(c) $D(Id_M)_{\mathbf{p}} = Id_{T_{\mathbf{p}}M} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{\mathbf{p}}M$.

(d) *Si f es un difeomorfismo, entonces $Df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{f(\mathbf{p})}N$ es un isomorfismo lineal, y*
$$D(f^{-1})_{f(\mathbf{p})} = (Df_{\mathbf{p}})^{-1}.$$

Usamos ahora cartas locales, para relacionar el espacio tangente a un punto de una variedad con el espacio tangente euclideano.

Proposición

Sea M una variedad suave (con o sin frontera), $\mathbf{p} \in M$, y $v \in T_{\mathbf{p}}M$. Si $f, g : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ coinciden en alguna vecindad $U \subset M$ de $\mathbf{p}$, entonces $v(f) = v(g)$. $\square$

Obs! La proposición anterior dice que las derivaciones (vectores tangentes) actúan de manera local.

Proposición (El espacio tangente a una subvariedad abierta)

Sea M un variedad suave (con o sin frontera), y sea $U \subseteq M$ un subconjunto abierto. Sea $i : U \to M$ el mapa de inclusión. Entonces, para cada $\mathbf{p} \in U$, el diferencial $Di_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}U \to T_{\mathbf{p}}M$ es un isomorfismo. $\square$

Proposición (Dimensión del espacio tangente)

Si M es una variedad suave n-dimensional, para cada punto $\mathbf{p} \in M$, el espacio tangente $T_{\mathbf{p}}M$ es un espacio vectorial n-dimensional.

Prueba: Dado $\mathbf{p} \in M$ considere (U, φ) una carta local en $\mathbf{p}$. Como φ es un difeomorfismo del abierto U a un abierto $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $D\varphi_{\mathbf{p}}$ es un isomorfismo de $T_{\mathbf{p}}U$ a $T_{\varphi(\mathbf{p})}\widehat{U}$. Además, de la proposición anterior $T_{\mathbf{p}}U \simeq T_{\mathbf{p}}M$ y que $T_{\varphi(\mathbf{p})}\widehat{U} \simeq T_{\varphi(\mathbf{p})}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n_{\varphi(\mathbf{p})}$. Luego, $\dim T_{\mathbf{p}}M = \dim \mathbb{R}^n_{\varphi(\mathbf{p})} = n$.

Obs! Existe un resultado análogo para variedades con frontera, el cual hace uso del lema siguiente: Si $i : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$ es el mapa de inclusión, entonces para todo $\mathbf{p} \in \partial\mathbb{H}^n$, la diferencial $Di_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathbb{H}^n \to T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo.

Vectores Tangentes en Coordenadas

Hasta ahora, nuestro tratamiento del espacio tangente a una variedad ha sido abtracto. Para aterrizarlo, lo que permitirá hacer cálculos con vectores tangentes y derivadas en coordenadas locales.

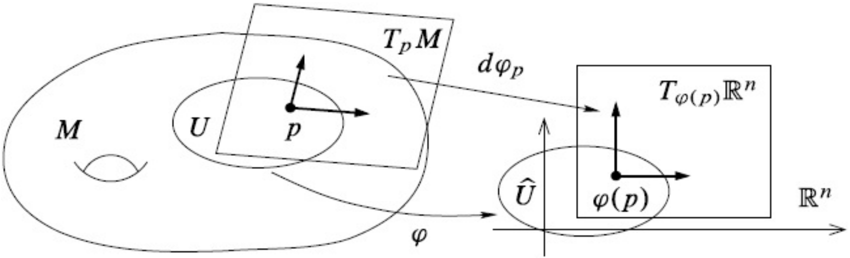
Suponga que M es una variedad suave (sin frontera), y sea (U, φ) una carta local en M. Entonces φ es un difeomorfismo de un abierto $U \subset M$ a un subconjunto abierto $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, y si $\mathbf{q} = \varphi(\mathbf{p})$, entonces $D\varphi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}U \to T_{\mathbf{q}}\widehat{U}$ es un isomorfismo.

Sabemos que las derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{\mathbf{q}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_{\mathbf{q}}$$

forman una base para $T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^n$ (la base canónica). Por tanto, las preimágenes de estos vectores bajo el isomorfismo $D\varphi_{\mathbf{p}}$ forman una base para $T_{\mathbf{p}}M$.

Vectores Tangentes en Coordenadas



El espacio tangente en coordenadas locales

Por simplicidad, denotamos a estas preimágenes con la misma notación de derivaciones $\frac{\partial}{\partial u_i}\big|_{\mathbf{p}}$ (al igual que en superficies). Si $\mathbf{x} = \varphi^{-1} : \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n_{\mathbf{q}} \to U$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\mathbf{p}} = D(\varphi_{\mathbf{p}}^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_{\mathbf{q}}\right) = D\mathbf{x}_{\mathbf{q}}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_{\mathbf{q}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vectores Tangentes en Coordenadas

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n & \text{es la base canónica de } T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^n \text{ (vista como vectores),} \\
\frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{\mathbf{q}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_{\mathbf{q}} & \text{es la base canónica de } T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^n \text{ (vista como derivaciones),} \\
\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{p}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\mathbf{p}} & \text{es la base canónica de } T_{\mathbf{p}}M.
\end{array}
$$

Con esta notación, todo vector $X \in T_{\mathbf{p}}M$ se escribe como $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}}$, con $\xi_i \in C^\infty(M)$. Las derivaciones actúan sobre funciones suaves $f \in C^\infty(M)$ mediante

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}}(f) = \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{\mathbf{q}}(f \circ \mathbf{x}) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{q}},
$$

donde $\widehat{f} = f \circ \mathbf{x} = f \circ \varphi^{-1}$ es la representación coordenada de f, luego

$$
X(f) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}}(f) = \sum_{i=1}^n \widehat{\xi^i} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{q}}.
$$

La Diferencial en Coordenadas

Mostramos ahora cómo se ven los diferenciales en coordenadas. Considere un mapa suave $f : U \to V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos. Para cualquier $\mathbf{p} \in U$, determinamos la matriz $Df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n \to T_{f(\mathbf{p})}\mathbb{R}^m$, en términos de las bases canónicas.

Usando $(x_1, \ldots, x_n)$ para las coordenadas en U, y $(y_1, \ldots, y_m)$ para las coordenads en V, de la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} Df_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}\Big)(g) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}(g \circ f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\mathbf{p}))\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\,\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(\mathbf{p})}\Big)(g). \end{aligned}$$

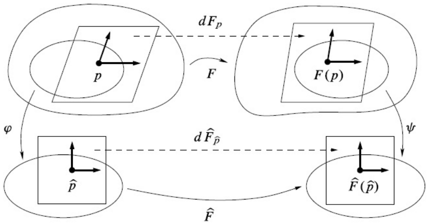
La Diferencial en Coordenadas

Esto es, $Df_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}\Big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(\mathbf{p})}$. En otras palabras, la matriz de $Df_{\mathbf{p}}$ en las bases coordenadas es

$$Df_{\mathbf{p}} = \Big(\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\Big)_{ij}.$$

Consideramos ahora el caso general de un mapa suave $f : M \to N$ entre variedades suaves. Elegimos cartas locales (U, φ) para $\mathbf{p} \in M$ y (V, ψ) para $f(\mathbf{p}) \in N$, y consideramos la representación local $\widehat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widehat{U} \to \widehat{V}$, con $\widehat{\mathbf{p}} = \varphi(\mathbf{p})$.
Entonces, $D\widehat{f}_{\widehat{\mathbf{p}}}$ está representado con respecto a las bases de coordenadas estándar por la matriz jacobiana $D\widehat{f}_{\widehat{\mathbf{p}}}$ en $\widehat{\mathbf{p}}$.

La Diferencial en Coordenadas



La diferencial $Df_{\mathbf{p}}$ en coordenadas locales.

Como $f \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \widehat{f}$,

$$\begin{aligned} Df_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}\Big) &= Df_{\mathbf{p}}\Big(D\varphi^{-1}_{\widehat{\mathbf{p}}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\widehat{\mathbf{p}}}\Big)\Big) = (D\psi^{-1})_{\widehat{f}(\widehat{\mathbf{p}})}\Big(D\widehat{f}_{\widehat{\mathbf{p}}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\widehat{\mathbf{p}}}\Big)\Big) \\ &= (D\psi^{-1})_{\widehat{f}(\widehat{\mathbf{p}})}\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \widehat{f}_i}{\partial x_j}(\widehat{\mathbf{p}})\, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{\widehat{f}(\widehat{\mathbf{p}})}\Big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \widehat{f}_i}{\partial x_j}(\widehat{\mathbf{p}})\, \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(\mathbf{p})}. \end{aligned}$$

Cambios de Coordenadas

Si (U,φ), (V,ψ) son cartas locales en M, $\mathbf{p} \in \cap V$, denotemos las coordenadas de φ por (x^i), y las coordenadas de ψ por $(\widetilde{x}^i)$. Cualquier vectora tangente $c \in T_{\mathbf{p}}M$ puede representarse en ambos sistemas.

El mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x) = (\widetilde{x}^1(x), \ldots, \widetilde{x}^n(x)),$$

y su diferencial es

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(\mathbf{p})}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\mathbf{p}}\right) = \sum_j \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x_i}(\varphi(\mathbf{p}))\, \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\Big|_{\psi(\mathbf{p})},$$

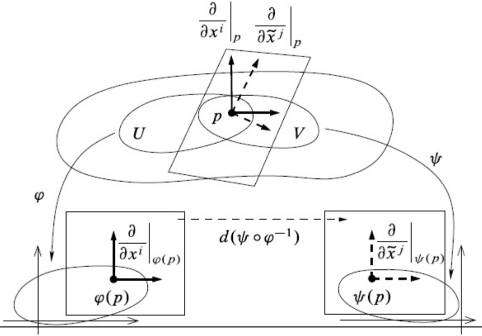
y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\mathbf{p}} &= D(\varphi^{-1})_{\varphi(\mathbf{p})}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(\mathbf{p})}\right) = D(\psi^{-1})_{\psi(\mathbf{p})}\left(\sum_j \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x_i}(\varphi(\mathbf{p}))\, \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\Big|_{\psi(\mathbf{p})}\right) \\ &= \sum_i \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x_i}(\widehat{\mathbf{p}})\, \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}\Big|_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Cambios de Coordenadas

Aplicando lo anterior a las componentes de un vector tangente $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{p}} = \sum_j \widetilde{v}_j \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j}\Big|_{\mathbf{p}}$, obtenemos

$$\widetilde{v}^j = \sum_i \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(\widetilde{\mathbf{p}})\, v_i.$$



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplo: (Coordenadas cartesianas y polares en $\mathbb{R}^2$).

Sea $\mathbf{p}$ el punto con representación polar $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{2})$, y sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^2$ el vector con representación

$$\mathbf{v} = 3\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\mathbf{p}}.$$

Aplicando la transformación para cambios de coordenadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathbf{p}} &= \cos(\tfrac{\pi}{2})\,\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}} + \sin(\tfrac{\pi}{2})\,\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\mathbf{p}} &= -2\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}} + 2\cos(\tfrac{\pi}{2})\,\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}} = -2\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{v} = 2\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}} + 3\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}}$. Básicamente, tenemos

$$v^r\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathbf{p}} + v^\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} v^r \\ v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ -2\sin(\frac{\pi}{2}) & 2\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} = v^x\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\mathbf{p}} + v^y\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\mathbf{p}}.$$

Sea M una variedad suave n-dimensional, $\mathbf{p} \in M$.

Definición

*El **espacio cotangente** a M en $\mathbf{p}$ se define como el espacio dual de $T_{\mathbf{p}}M$:*

$$T_{\mathbf{p}}M^* = \{f : T_{\mathbf{p}}M \to \mathbb{R} : \; f \text{ es lineal}\}.$$

Sea $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{p}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\mathbf{p}}$ la base canónica de $T_{\mathbf{p}}M$. Entonces, $T_{\mathbf{p}}M^*$ tiene una base canónica, denotada por $dx_1|_{\mathbf{p}}, \ldots, dx_n|_{\mathbf{p}}$, que opera sobre $T_{\mathbf{p}}M$ por la regla

$$dx_i\Big|_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{p}}\Big) = \delta_{ij}.$$

El espacio $L^2(T_{\mathbf{p}}M, \mathbb{R}) = \{\alpha : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \to \mathbb{R} : \; \alpha \text{ es bilineal}\}$ tiene la base

$$\{dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_j|_{\mathbf{p}} : \; i, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ejemplo: (Formas bilineales en $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$).
Sea $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ la base canónica para $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, y consideremos la base dual en el espacio dual $(\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}})^*$

$$dx_1|_{\mathbf{p}}, \dots, dx_n|_{\mathbf{p}}, \quad \text{con } dx_i|_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Si $\mathbf{v} = \sum_j v_j \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, al extender la definición anterior por linealidad

$$dx_i|_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = dx_i|_{\mathbf{p}}\Big(\sum_j v_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_j v_j\, dx_i|_{\mathbf{p}}(e_j) = v_i.$$

De la misma forma, si $\omega = \sum_i \omega_i\, dx_i|_{\mathbf{p}}$, $\omega_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_i \omega_i|_{\mathbf{p}}\Big(\sum_j v_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{ij} \omega_i(\mathbf{p})\, v_j\, dx_i|_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} \omega_i(\mathbf{p})\, v_j\, \delta_{ij} = \sum_j \omega_j(\mathbf{p})\, v_j.$$

Ejemplo

La base para $L^2(\mathbb{R}^n|_{\mathbf{p}}, \mathbb{R})$ es $\{dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_j|_{\mathbf{p}} : \; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$. En este caso,

$$dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_j|_{\mathbf{p}} \, (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) = dx_i|_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_k) \cdot dx_j|_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_\ell) = \delta_{ik} \, \delta_{j\ell}.$$

Así

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \, dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_j|_{\mathbf{p}}, \quad \text{con } \alpha_{ij} = \alpha(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

de modo que $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ admite una representación matricial (α_{ij}).

$L^2(T_{\mathbf{p}}M, \mathbb{R})$ se llama el **espacio de formas bilineales** sobre $T_{\mathbf{p}}M$. El cálculo en $L^2(\mathbb{R}^n|_{\mathbf{p}}, \mathbb{R})$ se aplica extendiendo por bilinealidad: si $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = \sum_j w_j \mathbf{e}_j$, entonces

$$\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \, v_i \, w_j = \mathbf{v}^T \, (\alpha_{ij}) \mathbf{w}.$$

Definición

*Sea M una variedad suave n-dimensional. Una **métrica Riemanniana** sobre M, es una asociación $\mathbf{p} \to g_{\mathbf{p}} \in L^2(T_{\mathbf{p}}M, \mathbb{R})$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *(simetría) $g_{\mathbf{p}}(X, Y) = g_{\mathbf{p}}(Y, X)$, $\forall X, Y$ campos.*

(2) *(positiva definida) $g_{\mathbf{p}}(X, X) > 0$, para todo campo $X \neq 0$.*

(3) *(diferenciabilidad) Los coeficientes g_{ij} de la representación local de $g_{\mathbf{p}}$*

$$g_{\mathbf{p}} = \sum_{ij} g_{ij}(\mathbf{p})\, dx_i|_{\mathbf{p}} \otimes dx_i|_{\mathbf{p}}$$

son todos funciones diferenciables $C^\infty(M)$.

*El par (M, g) se llama una **variedad Riemanniana** o tensor métrico.*

Observaciones

- Toda métrica Riemanniana g define en cada punto $\mathbf{p}$ un producto interno $g_{\mathbf{p}}$ sobre $T_{\mathbf{p}}M$. Escribimos $g_{\mathbf{p}}(X, Y)$ en lugar de $\langle X, Y\rangle$. $g_{\mathbf{p}}$ determina las nociones de ángulos, longitudes y elementos superficiales (área).
- Si la condición de que g es positiva definida se reemplaza por *no degenerado* ($g_{\mathbf{p}}(X, Y) = 0, \forall X \;\Rightarrow\; X = 0$), obtenemos una **métrica pseudo-Riemanniana** o **métrica semi-Riemanniana**).

Ejemplos:

1. La primera forma fundamental $I_{\mathbf{p}}$ en superficies es métrica Riemanniana.
2. En el caso de hiperficies en $\mathbb{R}^n$, también la primera forma fundamental $g_{\mathbf{p}} = (g_{ij})$, con $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle$ define una métrica Riemanniana.
3. La métrica de Lorentz es una métrica Riemanniana en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$.

$$g = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición (Mapas compatibles con la métrica)

*Un mapa diferenciable $f : M \to \widetilde{M}$ entre variedades Riemannianas (M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es una **isometría** (local), si para todo $\mathbf{p} \in M$, y todos $X, Y \in T_{\mathbf{p}}M$ se tiene*

$$\widetilde{g}_{f(\mathbf{p})}(Df_{\mathbf{p}} \cdot X, Df_{\mathbf{p}} \cdot Y) = g_{\mathbf{p}}(X, Y).$$

*En ese caso (M, g) y $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ son (localmente) **isométricas**.*

*Similarmente, f es un **mapeo conforme**, si existe una función $\lambda : M \to \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que para todo $\mathbf{p} \in M$, $\forall X, Y \in T_{\mathbf{p}}M$*

$$\widetilde{g}_{f(\mathbf{p})}(Df_{\mathbf{p}} \cdot X, Df_{\mathbf{p}} \cdot Y) = \lambda^2(\mathbf{p})\, g_{\mathbf{p}}(X, Y).$$

Queremos definir ahora la derivada en una variedad suave abstracta o variedad Riemanniana, no sólo para funciones escalares $C^\infty(M)$, sino para campos de vectores diferenciables. Al igual que en superficies esto nos llevó al concepto de derivada covariante, sucede algo similar en variedades Riemannianas.

Definición

*Sean X, Y campos vectoriales suaves sobre una variedad suave M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El **corchete de Lie** es el campo $[X, Y]$ dado por*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

*(también llamado la **derivada de Lie** $\mathcal{L}_X Y$ de Y en la dirección de X). Localmente en $\mathbf{p} \in M$ se tiene $[X, Y]_\mathbf{p}(f) = X_\mathbf{p}(Yf) - Y_\mathbf{p}(Xf)$.*

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Lemma (Propiedades del corchete de Lie)

Sean X, Y, Z campos vectoriales en M, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, h : M \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Entonces

(i) *(linealidad)* $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

(ii) *(anti-simetría)* $[X, Y] = -[Y, X]$,

(iii) *(fórmula de Cartan)* $[fX, hY] = fh\,[X, Y] + f\,(Xh)Y - h\,(Yf)X$,

(iv) *(identidad de Jacobi)* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$,

(v) $\left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right] = 0$, $i \neq j$, *para toda carta local con coordenadas* $(u_1, \ldots, u_n)$.

(vi) *En coordenadas locales, tenemos*

$$\Big[\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] = \sum_{i,j} \Big(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Definición

Sea (M, g) variedad Riemanniana. Una ***conexión Riemanniana*** *sobre M, es un mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*

$$(X, Y) \to \nabla_X Y,$$

que al par (X, Y) les asocia un tercer campo $\nabla_X Y$, que satisface

(i) (aditividad en el subíndice) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$,

(ii) (linealidad en el subíndice) $\nabla_{fX} Y = f\,\nabla_X Y$,

(iii) (linealidad en el argumento) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,

(iv) (regla del producto) $\nabla_X (fY) = f\,\nabla_X Y + (X(f))Y$,

(v) (compatibilidad con la métrica) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

(vi) (simetría libre de torsión) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$.

Conexiones Riemannianas

Ejemplos:

1. En el espacio euclideano $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $g_0 = (\delta_{ij})$, la derivada direccional $\nabla = D$ es una conexión Riemanniana.

2. En una superficie en $\mathbb{R}^3$, o una hiperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$, la deerivada covariante ∇, define una conexión Riemanniana, para la primera forma fundamental.

3. En $\mathbb{R}^3$, si definimos $\nabla_X Y = D_X Y + \frac{1}{2}(X \times Y)$, entonces ∇ satisface las propiedades (i) a (v), pero no (vi):

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = D_X Y - D_Y X + (X \times Y = [X, Y] + \underbrace{(X \times Y)}_{\text{torsión}}.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Algunas propiedades importantes de las conexiones Riemannianas

Teorema
En toda variedad Riemanniana (M, g), existe una única conexión Riemanniana ∇ determinada por g.

Vale la **Fórmula de Koszul**:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X]).$$

En coordenadas locales, valen las expresiones para **símbolos de Christoffel**

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\Big), \quad \Gamma_{ij,k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k}, \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_\ell \Gamma_{ij,\ell} g^{\ell k}.$$

y

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} + \sum_j \eta_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

que en notación compacta (cálculo de Ricci) es

$$\nabla_i \eta^k = \xi^i \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + \eta^j \Gamma_{ij}^k \right).$$

Vale la **ecuación de los campos paralelos**

$$\nabla_{\dot{c}} Y = \sum_k \left(\frac{d\eta^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c(t))\, \dot{c}^i(t)\, \eta^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Vale la **ecuación de las geodésicas**

$$\sum_k \left(\frac{d\eta^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} \dot{x}^i\, \dot{c}^j\, \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$