Variedades diferenciables II

Alan Reyes-Figueroa
Geometría Diferencial

(Aula 31) 14.mayo.2021

Definición

*Una **variedad diferenciable de clase** C^k, n-dimensional, es un espacio topológico X unido con un atlas diferenciable $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ a abiertos en $\mathbb{R}^n$, donde las transiciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son todos mapas de clase C^k.*

Definición

*Una **variedad suave** n-dimensional, (**smooth manifold**) es un espacio topológico X unido con un atlas diferenciable $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ a abiertos en $\mathbb{R}^n$, donde las transiciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son todos mapas de clase C^∞.*

Más ejemplos de Variedades

Ejemplo 6: (Variedades 0-dimensionales)
Para todo punto $\mathbf{p}$, una vecindad abierta U en $\mathbb{R}^0$ de $\mathbf{p}$ es $\{\mathbf{p}\}$
$\Rightarrow X = \bigcup_i \{\mathbf{p}_i\}$ es un espacio discreto. Los mapas coordenados son de la forma $\varphi : \{\mathbf{p}\} \to \mathbb{R}^0$.

Ejemplo 7: (Subvariedades abiertas)
Sea X una variedad diferenciable n-dimensional, y sea $A \subseteq X$ un abierto. Entonces A es una variedad diferenciable.
Basta ver que si $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ es un atlas diferenciable para X, entonces $\mathcal{A}\big|_A = \{(U_i \cap A, \varphi_i\big|_{U_i \cap A})\}_i$ define un atlas diferenciable para A.

Ejemplo 8: (Espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$)
Para todo $n \geq 0$, $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable con el atlas trivial $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$. Llamamos a esta la **estructura diferenciable estándar**.

Más ejemplos de Variedades

Ejemplo 9: (Una estructura diferenciable no estándar)
Definimos otra estructura diferenciable para $\mathbb{R}$. Consideremos la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = x^3$.
ψ es homeomorfismo (y es diferenciable). Definimos el atlas $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$ para $\mathbb{R}$, diferente del atlas estándar $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, Id)\}$.

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ no son compatibles, pues $(Id \circ \psi^{-1})(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable.

Sin embargo, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son **difeomorfos**, ya que existe un mapa diferenciable $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

¿Existen estructuras suaves no difeomorfas para una misma variedad?

- Milnor (1956) mostró que existen en S^7 (*exotic spheres*).
- Donaldson y Freedman (1984) mostraron que en $\mathbb{R}^4$ existen (*fake* $\mathbb{R}^4$'s).

Ejemplo 10: (Espacios vectoriales finito-dimensionales)
Sea V esp. vectorial de dimensión finita n, normado. Toda norma induce induce una topología en V, independiente de la norma (recordemos que todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$).

Toda base $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V induce un mapa $E : \mathbb{R} \to V$, dado por $E(\mathbf{x}) = \big(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\big) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$.
Este mapa E es un homeomorfismo (es isomorfismo linear), $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^n, E)$ es una carta local para V. Si $(\mathbb{R}^n, \widetilde{E})$ es otra carta local, esto es $\widetilde{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es otra base de V, y $\widetilde{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i$, entonces el mapa $\widetilde{E}^{-1} \circ E$ es el mapa de cambio de base

$$\widetilde{B}^{-1} B : \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i.$$

Este es un difeomorfismo, al ser un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$.

Más Ejemplos de Variedades

Ejemplo 11: (Espacios de matrices)

Los espacios de matrices $\mathbb{R}^{m\times n} = M(m\times n, \mathbb{R})$ son variedades diferenciables.

Si $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz con entradas $(e_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$, basta identificar $\mathbb{R}^{m\times n}$ con $\mathbb{R}^{mn}$ mediante el isomorfismo natural $E_{ij} \to \mathbf{e}_{ni+j} \in \mathbb{R}^{mn}$, $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$.

Ejemplo 12: (Otros subespacios de matrices)

$\mathbb{R}^{m\times n} = M(m\times n, \mathbb{R})$ tiene varias subvariedades abiertas:

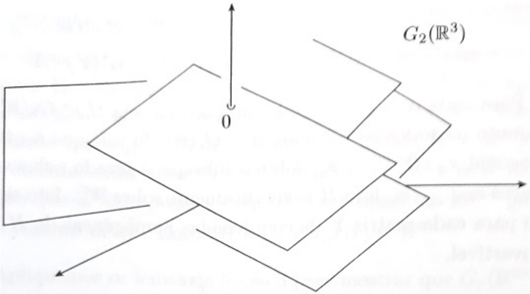
- Cuando $m = n$, el **grupo lineal**

$$G(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : \; M \text{ es invertible}\}.$$

- $M_r = \{M \in \mathbb{R}^{m\times n} : \; \operatorname{rank} M = r\}$, para $r = 1, 2, \ldots, \min(m, n)$.
- Los espacios lineales $L(V, W)$ entre espacios vectoriales.

Ejemplo 13: (La Grassmaniana)

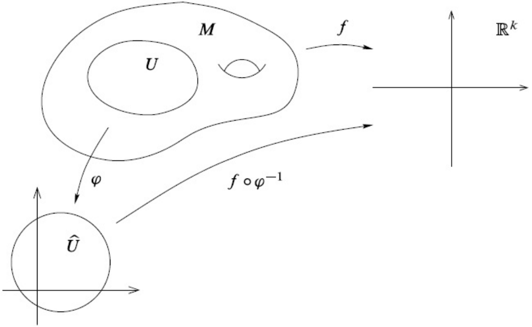
El conjunto $G_k(\mathbb{R}^n) = G(k,n) = \{$subespacios vectoriales k-dimensionales en $\mathbb{R}^n\}$, tiene una estructura de variedad diferenciable. Son llamadas **variedades de Grassmann**.



Caso especial: $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = G(1, n+1) = \mathbb{RP}^n$.

Definición

*Sea M una n-variedad, $k \geq 0$, y sea $f : M \to \mathbb{R}^k$ una función. Diremos que f es un **mapa diferenciable (C^k, suave)** si para todo punto $\mathbf{p} \in M$, existe una carta local (U, φ) de $\mathbf{p}$ tal que la composición $f \circ \varphi^{-1}$ diferenciable (C^k, suave).*



Funciones sobre Variedades

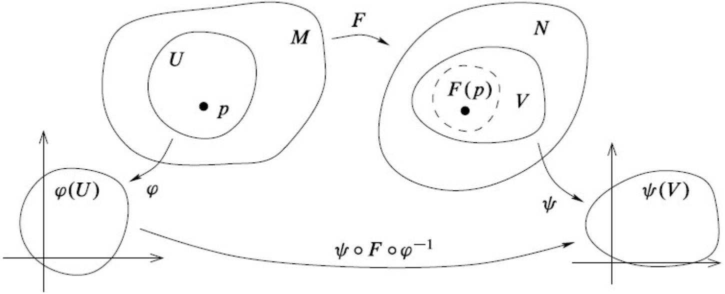
Denotamos por $C^k(M)$ al conjunto de funciones de clase C^k sobre M.
Denotamos por $C^\infty(M)$ al conjunto de funciones suaves sobre M.
$C^0(M) = C(M)$ corresponde al conjunto de funciones continuas sobre M.

- sumas y productos de funciones (C^k, suaves), son (C^k, suaves).
- $C^k(M)$ y $C^\infty(M)$ tiene estructura de anillo conmutativo.
- Cuando $M \subseteq \mathbb{R}^p$, el concepto de f ser diferenciable coincide con el usual de cálculo en $\mathbb{R}^p$.
- Todas las definiciones anteriores se adaptan en el caso de variedades con bordes (considerando cartas a $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{H}^n$).

La función $f \circ \varphi^{-1}$ se llama la **representación coordenada** de f.

Definición

Sean M, N variedades suaves, de dimensiones n y p, respectivamente. Sea $f : M \to N$ una función. Diremos que f es un ***mapa suave*** *si para todo punto $\mathbf{p} \in M$, existen carta locales (U, φ) de $\mathbf{p}$ y (V, ψ) de $f(\mathbf{p})$ en N, tales que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es suave como mapa de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.*



Propiedad

Todo mapa suave entre variedades es contínuo.

Prueba: Sean M y N variedades suaves (con o sin frontera). y $f : M \to N$ un mapa suave. Sea $\mathbf{p} \in M$. Entonces, existen cartas locales (U, φ) de $\mathbf{p}$ en M y (V, ψ) de $f(\mathbf{p})$ en N, tales que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave, portanto continua.

Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ y $\psi : V \to \psi(V)$ son homeomorfismos, esto implica que

$$f\big|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to V$$

es una composición de funciones continuas. Luego, es continua en U. Como f es continua en cada vecindad de cada $\mathbf{p} \in M$, entonces f es continua en M. $\square$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Funciones sobre Variedades

Proposición (Caracterización de diferenciabilidad)

Sean M y N variedades suaves, y $f : M \to N$ una función. Entonces f es suave si, y sólo si, se cumple alguna de las condiciones siguientes:

(a) *Para todo $\mathbf{p} \in M$, existen cartas locales (U, φ) de $\mathbf{p}$, y (V, ψ) de $f(\mathbf{p})$ tales que $U \cap f^{-1}(V)$ es abierto, y la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es suave de $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ a $\psi(V)$.*

(b) *f es continua y existen atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ para M y N, tales que para cada α y β, $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es suave de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))$ a $\psi_\beta(V_\beta)$.*

Proposición (Diferenciabilidad es local)

Sean M y N variedades suaves, y $f : M \to N$ una función. Entonces

(a) *Si todo $\mathbf{p} \in M$ tiene una vecindad U tal que $f\big|_U$ es suave, entonces f es suave.*

(b) *Recíprocamente, si f es suave, entonces toda restricción a un subconjunto abierto es suave.*

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Corolario (Lema de Pegado (*Gluing Lemma / Pasting Lemma*))

Sean M y N variedades suaves (con o sin frontera). Sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una cobertura abierta para M. Suponga que para cada α, $f_\alpha : U_\alpha \to N$ es un mapa suave, de modo que estos mapas coinciden en intersecciones $f_\alpha\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, $\forall \alpha, \beta$.
Entonces existe un único mapa suave $f : M \to N$, tal que $f\big|_{U_\alpha} = f_\alpha$, $\forall \alpha$.

Si $f : M \to N$ es un mapa suave entre variedades, y (U, φ), (V, ψ) son cartas locales de M y N, respectivamente, el mapa $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ se llama la **representación local o coordenada** de f. Este mapea de $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ a $\psi(V)$.

Funciones sobre Variedades

Propiedad

Sean M, N y P variedades suaves (con o sin frontera). Entonces

(a) *Todo mapa constante $c : M \to N$ es suave.*

(b) *El mapa identidad $id : M \to M$ es suave.*

(c) *Si $U \subseteq M$ es un subconjunto abierto (subvariedad), entonces la inclusión $i : U \to M$ es suave.*

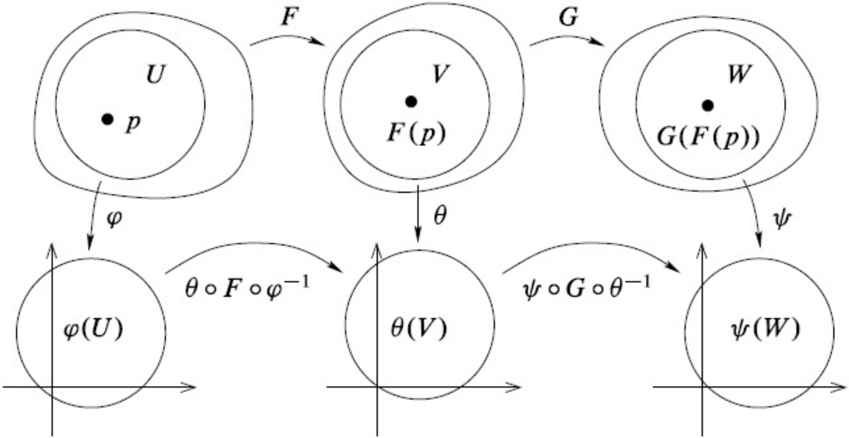
(d) *Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son suaves, entonces $g \circ f : M \to P$ es suave.*

Prueba: (d) Basta ver que, en cartas locales (U, φ), (V, θ), (W, ψ) de M, N, P respectivamente, el mapa

$$\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ g \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ f \circ \varphi^{-1})$$

es suave, al ser composición de mapas suaves. $\square$

Funciones sobre Variedades



Una composición de mapas suaves es suave.

Proposición

Sean $M_1, M_2, \ldots, M_k$ y N variedades suaves (sin frontera). Definamos $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ la variedad producto. Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ sea $\pi_i : M \to M_i$ la i-ésima proyección sobre el factor M_i.
Entonces, el mapa $f = (f_1, \ldots, f_n) : M \to N$ es suave, si y sólo si, cada uno de los mapas componentes $f_i = \pi_i \circ f : M_i \to N$ es suave, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Obs! Existe una versión análoga para variedades con frontera, pro requiere la hipótesis adicional de que a lo suma una de las variedades componentes M_i tenga frontera no-vacía.

Funciones sobre Variedades

Ejemplos:

1. Todo mapa definido de una variedad 0-dimensional a una variedad suave, es automáticamente suave (la representación en coordenadas de cada función componentes es constante).

2. Consideremos el mapa $f : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $f(t) = e^{2\pi it}$. Este mapa es suave respecto de la coordenada angular θ ($e^{i\theta}$ en S^1).
   Su representación en coordenadas es de la forma $f(t) = 2\pi t + c$, para alguna $c \in \mathbb{R}$.

3. El mapa $f^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ dado por
   $$f^n(\mathbf{x}) = f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_n}),$$
   es un mapa suave sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

Ejemplos:

4. Consideramos la n-esfera S^n, con su estructura diferenciable estándar.
   La inclusión $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ciertamente es continuo, ya es es el mapa inclusión de un subespacio topológico. Para mostrar que es un mapa suave, basta ver que en cartas locales, su representación es dada por

$$\begin{aligned} i(\mathbf{u}) &= i(u_1, \ldots, u_n) = (i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1})(u_1, \ldots, u_n) \\ &= \big(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - ||\mathbf{u}||^2}, u_{i+1}, \ldots, u_n\big), \end{aligned}$$

   el cual es suave sobre el dominio $\mathbb{D}^n$.

Funciones sobre Variedades

Ejemplos:

5. El mapa cociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ es suave. En coordenadas locales, este es

$$\begin{aligned} \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (\varphi_i \circ \pi)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \varphi[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \\ &= \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right). \end{aligned}$$

6. Si $M_1, \ldots, M_k$ son variedades suaves, cada proyección $\pi_i : M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$ es un mapa suave, ya que representación en coordenadas locales (en cualquier carta local), es de la forma

$$\pi(x_1, \ldots, x_k) = x_i.$$

Definición

Si M y N son variedades suaves (con o sin frontera), una mapa suave $f : M \to N$ se llama un ***difeomorfismo****, si f es biyectiva, y la inversa $f^{-1} : N \to M$ es también suave.*

En ese caso, decimos que M u N son ***difeomorfas****, y escribimos $M \simeq N$.*

Ejemplo:

Consideremos los mapa $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{D}^n$ dados por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}}, \quad g(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{1 + ||\mathbf{y}||^2}}.$$

Estos mapas son suaves. Además, $g \circ f = Id_{\mathbb{D}^n}$ y $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^n}$, de modo que son inversos uno del otro. Portanto son difeomorfismos, y $\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Propiedad (Propiedades de los difeomorfismos))

(a) *Toda composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.*

(b) *Todo producto finito de difeomorfismos entre variedades suaves es un difeomorfismo.*

(c) *Todo difeomorfismo es un homeomorfismo y un mapa abierto.*

(d) *La restricción de un difeomorfismo a una subvariedad abierta, con o sin frontera, es un difeomorfismo sobre su imagen.*

(e) *"Ser difeomorfo" es una relación de equivalencia en la clase de todas las variedades suaves (con o sin frontera).*

Difeomorfismos

Teorema (Invarianza de la dimensión)

Una variedad suave de dimensión n no puede ser difeomorfa a una variedad suave de dimensión $m \neq n$.
Equivalentemente, si M y N son variedades suaves no vacías y $M \simeq N$, entonces $\dim M = \dim N$.

Teorema (Invarianza de la frontera)

Sean M y N variedades suaves con frontera, con $M \simeq N$. Entonces, $f(\partial M) = \partial N$, y el difeomorfismo se restringe a un difeomorfismo $f\big|_{\operatorname{Int} M} : \operatorname{Int} M \to \operatorname{Int} N$.