Variedades diferenciables

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 30) 12.mayo.2021

Definición

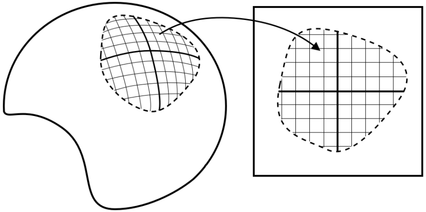
Un espacio topológico X es ***Hausdorff*** *si para todo par de puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ existen vecindades U de $\mathbf{p}$ en X y V de $\mathbf{q}$ en X, tales que $U \cap V = \varnothing$.*

Definición

Un espacio topológico X es ***segundo enumerable****, si la topología de X admite una base enumerable B.*

Definición

Un espacio topológico X es ***localmente Euclideano*** *de dimensión n, si todo punto $\mathbf{p} \in X$ posee una vecindad $U \subseteq X$ homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.*



Una superficie S es un espacio localmente euclideano de dimensión 2.

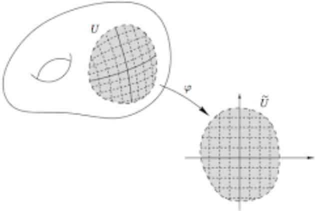
Suponga que X es localmente euclidiano de dimensión n. Si $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto, homeomorfo a un abierto V de $\mathbb{R}^n$, entonces U se llama un **dominio coordenado**, y cualquier homeomorfismo $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama un **mapa coordenado**.

Al par (U, φ) se le llama una **carta local** de X.

Si $\mathbf{p} \in U$, diremos en ese caso que U es una **vecindad coordenada** o **vecindad parametrizada** de $\mathbf{p}$.

Definición

*Una **variedad topológica** n-**dimensional** X o n-**variedad**, es un espacio topológicoa Hausdorff, segundo enumerable, y localmente euclideano de dimensión n.*



Una variedad topológica 2-dimensional.

Definición

Sea X espacio topológico. Un ***atlas topológico*** *de X es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cartas locales, con las siguientes propiedades:*

a) $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq X \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un homeomorfismo,* $\forall \alpha \in \Lambda$.

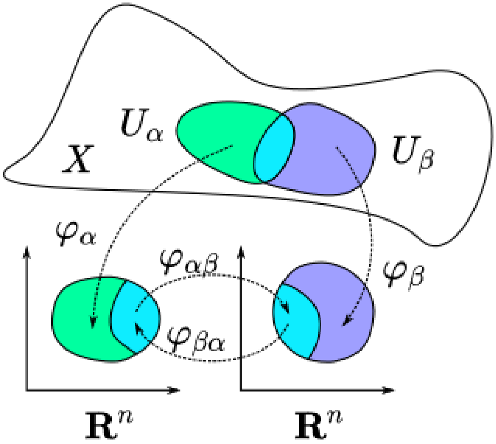
b) *si* $\alpha, \beta \in \Lambda$ *son tales que* $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, *entonces* $W_\alpha = \varphi_\alpha(W)$ *y* $W_\beta = \varphi_\beta(W)$ *son abiertos de* $\mathbb{R}^n$, *y* $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : W_\alpha \to W_\beta$ *es un homeomorfismo entre abiertos de* $\mathbb{R}^n$.

c) $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Una definición alternativa de variedades es la siguiente:

Definición

Una ***variedad topológica*** n***-dimensional*** *es un espacio topológico X unido con un atlas topológico $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ a abiertos en $\mathbb{R}^n$.*



Una variedad n-dimensional abstracta, con su atlas topológico.

<u>Observaciones</u>:

- Todo atlas topológico $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_\alpha$ induce sobre X una topología natural: los abiertos de X son todas las preimágenes $U = \varphi_\alpha^{-1}(V)$, de abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Lo anterior induce una topología τ en X de forma que los mapas φ_α son todos homeomorfismos.
- Al igual que en el caso de superficies, todo atlas de X siempre está contenido en un **atlas maximal** (basta aplicar el Lema de Zorn al conjunto ordenado de todos los atlas de X).
- Si $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_\alpha$ es un atlas maximal de X y $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es homeomorfismo, entonces $\varphi \circ \mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi \circ \varphi_\alpha\}_\alpha$ es también un atlas maximal.
- Dos atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de X son **compatíbles** si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es atlas de X.

Proposición

Sea X variedad, y sea $\mathcal{A}$ un atlas para X. Entonces, existe un único atlas maximal $\mathcal{A}_{max}$ de X que contiene a $\mathcal{A}$. $\square$

Obs! Es común también dar la definición de atlas en sentido opuesto, donde los mapas $\mathbf{x}_\alpha : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to U_\alpha \subseteq X$ se denotan al estilo de las parametrizaciones. Esto es $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, con

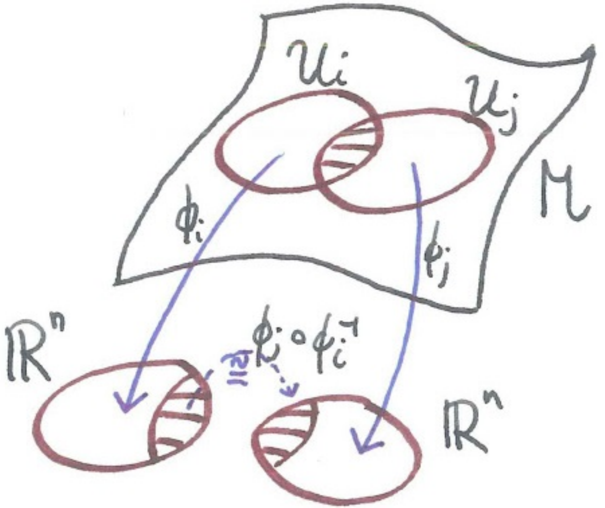
a) $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to V_\alpha \subseteq X$ son homeomorfismos.

b) $W = V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing \;\Rightarrow\; W_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $W_\beta = \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$, y $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha : W_\alpha \to_\beta$ es un homeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

c) $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$.

Los $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ o $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son llamados **cambios de coordenadas.**

Variedades Diferenciables



Definición

*Sea X espacio topológico. Un **atlas diferenciable** de X es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de cartas locales, con las siguientes propiedades:*

a) $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq X \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ *es homeomorfismo,* $\forall\alpha \in \Lambda$.

b) *si* $\alpha, \beta \in \Lambda$ *son tales que* $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, *entonces* $W_\alpha = \varphi_\alpha(W)$ *y* $W_\beta = \varphi_\beta(W)$ *son abiertos de* $\mathbb{R}^n$, *y* $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : W_\alpha \to W_\beta$ *es un difeomorfismo entre abiertos de* $\mathbb{R}^n$.

c) $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Una definición alternativa de variedades es la siguiente:

Definición

*Una **variedad diferenciable** n**-dimensional** es un espacio topológico X unido con un atlas diferenciable $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ a abiertos en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplos

Ejemplo 1: (Gráficas de funciones diferenciables). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $f : U \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Recordemos que el grafo de f es

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : \; x \in U, \; y = f(x)\},$$

con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Sea $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ la proyección sobre el primer factor $\pi_1(x, y) = x$, y sea $\varphi = \pi_1\big|_{\Gamma(f)}$, su restricción sobre $\Gamma(f)$:

$$\varphi : \Gamma(f) \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x, y) = x, \quad \text{para } (x, y) \in \Gamma(f).$$

φ es continua, pues es restricción de una función continua π_1, φ es un homeomorfismo, con inversa $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$, de modo que (U, φ) es una carta local para $\Gamma(f) \Rightarrow \Gamma(f)$ es una variedad topológica n-dimensional.

f diferenciable $\Rightarrow$ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ diferenciables, y $\Gamma(f)$ es variedad diferenciable.

Ejemplos

Ejemplo 2: (Esferas S^n). Para cada $n \geq 0$, la n-esfera unitaria

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| = 1\}$$

es un espacio Hausdorff y segundo enumerable, al ser subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para mostrar que es localmente euclideano, consideramos los abiertos

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_i > 0\}, \\ U_i^- &= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_i < 0\}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Definimos la función diferenciable $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(\mathbf{u}) = \sqrt{1 - ||\mathbf{u}||^2}.$$

Ejemplos

Observe que $U_i^+ \cap S^n$ es la gráfica de la función

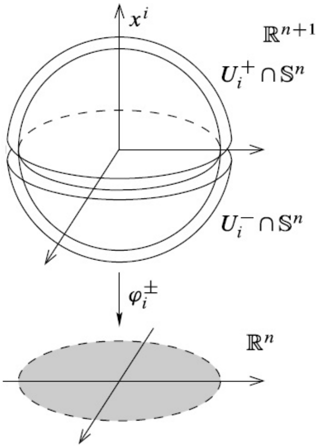
$$\varphi_i^+ \;:\; x_i = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

y $U_i^- \cap S^n$ es la gráfica de la función

$$\varphi_i^- : x_i = -f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Luego, cada $U_i^+ \cap S^n$, $U_i^- \cap S^n$ es localmente euclideano, y difeomorfo a $\mathbb{D}^n$.

Así, $\mathcal{A} = \{(U_i^+ \cap S^n, \varphi_i^+ :),\ (U_i^+ \cap S^n, \varphi_i^- :)\}_{i=1}^{n+1}$ conforma un atlas de $2(n+1)$ cartas locales diferenciables para S^n. Portanto, S^n es una variedad diferenciable n-dimensional.



Cartas para S^n.

Ejemplos

Ejemplo 3: (Espacios proyectivos $\mathbb{RP}^n$).

El espacio proyectivo real n-dimensional, denotado por $\mathbb{RP}^n$ (o simplemente $\mathbb{P}^n$) se define como el conjunto de los subespacios lineales 1-dimensionales en $\mathbb{R}^{n+1}$, con la topología cociente dada por

$$\pi : \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\sim} \to \mathbb{RP}^n, \quad \text{con } \mathbf{x} \sim \lambda\mathbf{x},\ \forall \lambda \neq 0.$$

A cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $\pi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}] = \langle \mathbf{x} \rangle$ lo manda al subespacio generado por $\mathbf{x}$ (la recta que pasa por $\mathbf{x}$).

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n+1$, sea $\widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ el subconjunto abierto

$$\widetilde{U}_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, :\ x_i \neq 0\},$$

y sea $U_i = \pi(\widetilde{U}_i) \subset \mathbb{RP}^n$.

Ejemplos

Definimos el mapa $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i([\mathbf{x}]) = \varphi_i([x_1 : x_2 : \ldots : x_n]) = \Big(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\Big).$$

Este mapa está bien definido pues, si consideramos $\lambda\mathbf{x}$ en lugar de $\mathbf{x}$ ($\lambda \neq 0$), entonces

$$\varphi_i([\lambda\mathbf{x}]) = \Big(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_i}, \ldots, \frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i}, \ldots, \frac{\lambda x_{n+1}}{\lambda x_i}\Big) = \varphi_i([\mathbf{x}]).$$

(esto es, $\pi \circ \lambda = \pi \ \Rightarrow (\varphi_i \circ \pi) \circ \lambda = \varphi_i \circ \pi$).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "\varphi_i \circ \pi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{RP}^n \arrow[ur, "\varphi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

x $\qquad$ $(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$

$[x]$

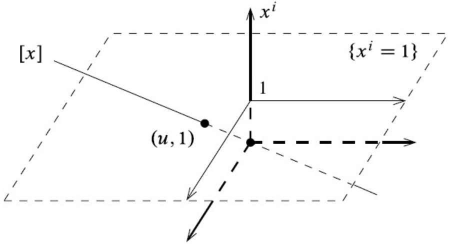
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos

Como $\varphi_i \circ \pi$ es continua, entonces φ_i es continua (propiedad característica de los mapas cociente). De hecho, φ_i es un homeomorfismo, con inversa

$$\varphi_i^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = [u_1 : \ldots : u_{i-1} : 1 : u_{i+1} : \ldots : u_n].$$

Geométricamente, $\varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, significa que $(\mathbf{u}, 1)$ es el punto de $\mathbb{R}^{n+1}$ donde la recta $[\mathbf{x}]$ al hiperplano $x_i = 1$.



Una carta local para el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$.

Ejemplos

Los conjuntos $U_1, \ldots, U_{n+1}$ cubren a todo $\mathbb{RP}^n$, de forma que $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ es un atlas de $n+1$ cartas locales para $\mathbb{RP}^n$. Esto muestra que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad topológica de dimensión n.

Obs:

- No mostramos aquí que $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff y segundo enumerable (ejercicio!).
- Las transiciones cambios de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son difeomorfismos $\Rightarrow$ $\mathbb{RP}^n$ variedad diferenciable.
- $\mathbb{RP}^n$ es compacta.
  (Se puede mostrar que $\mathbb{RP}^n \simeq S^n/\{\pm 1\}$, identificando puntos antípodas).
- $\mathbb{RP}^n$ es no-orientable.

Ejemplos

Ejemplo 4: (Productos de variedades).
Sean $X_1, \ldots, X_k$ variedades topológicas de dimensiones $n_1, \ldots, n_k$, resp. Mostramos que el espacio producto $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ es una variedad de dimensión $n_1 + \ldots + n_k$.

- Es Hausdorff y segundo enumerable (ejercicio!, ver apéndice A en el libro de Lee *Smooth Manifolds*).
- Verificamos que es localmente euclideana. Dado $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k) \in X_1 \times \ldots \times X_k$, elegimos cartas locales (U_i, φ_i) de p_i en X_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$. El mapa producto

$$\varphi = \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_k : X_1 \times \ldots \times X_k \to \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}, \quad \varphi(\mathbf{p}) = (\varphi_1(p_1), \ldots, \varphi_k(p_k)),$$

es un homeomorfismo sobre su imagen, la cual es un producto de abiertos en $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$.

Ejemplos

Esto muestra que $\mathcal{A} = \{(U_1 \times \ldots \times U_k, \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_k)\}_i$ es un atlas topológico para X, y $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ es una variedad topológica.

En particular, si $X_1, \ldots, X_k$ son variedades diferenciables, su producto $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ es también una variedad diferenciable.

Ejemplo 5: (Toros $\mathbb{T}^n$).
Para $n \geq 1$, definimos el n-**toro** como el producto

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ veces}}.$$

De la discusión anterior, $\mathbb{T}^n$ es una variedad diferenciable n-dimensional.

Variedades con Borde

Es intuitivamente evidente (aunque no fácil de probar) que una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ no es una variedad, porque un punto en su límite no tiene ninguna vecindad abierta.

No obstante, las bolas cerradas y muchos espacios como estos tienen importantes aplicaciones en la teoría de variedades. Por tanto, es útil considerar una clase de espacios que es algo más amplio que la clase de variedades.

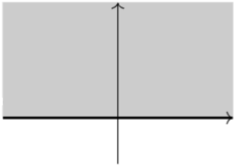
Cerca de sus límites, los espacios en esta nueva clase se modelan usando el **semiespacio cerrado superior** $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_n \geq 0\}.$$

En particular

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_n = 0\}.$$

Para $n = 0$, se tiene que $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$ y $\partial\mathbb{H}^0 = \varnothing$.



Semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

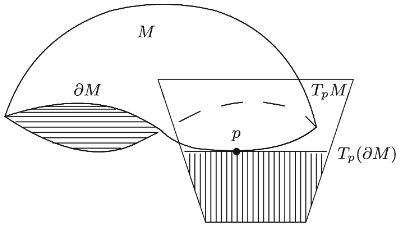
Definición

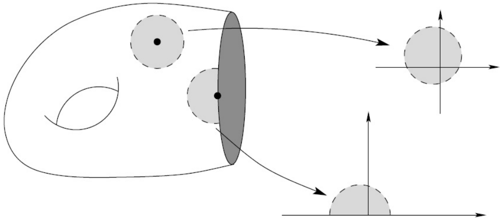
*Una **variedad** n**-dimensional con borde** es un espacio topológico Hausdorff X, segundo enumerable, en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$, o a un abierto de $\mathbb{H}^n$.*

Una carta local (U, φ) se llama **carta interior**, si $\varphi(U)$ es homemorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$; y **carta frontera**, si $\varphi(U)$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{H}^n$, tal que $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$.

Variedades con Borde

Un punto **p** $\in X$ se llama **punto interior** de X si está en el dominio de alguna carta interior. Análogamente, **p** es un **punto frontera** de X si está en el dominio de una carta frontera, que envía **p** a $\partial\mathbb{H}^n$.
El conjunto de todos los puntos interiores de X se denota por $\operatorname{Int} X$. El conjunto de los puntos frontera es el **borde** de X, y se denota por ∂X.





Ejemplos de 2-variedades topológicas con borde.

Más Ejemplos de Variedades

Mas ejemplos:

- Variedades 0-dimensionales.
- Variedades 1-dimensionales (curvas), 2-dimensionales (superficies).
- Espacios euclideanos.
- Otras estructuras diferenciables.
- Espacios vectoriales finito dimensionales.
- Espacios de matrices.
- Subvariedades abiertas.
- $GL(n, \mathbb{R})$, $M_k(m \times n, \mathbb{R})$, $L(V, W)$.
- La Grassmaninana $G_k(\mathbb{R}^n) = G(k, n)$.