La Derivada Covariante

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 26) 28.abril.2021

Sea S una hiperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Definición

*Un **campo de vectores tangente** a S es un mapa $X : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $X(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$.*
*Decimos que X es **diferenciable** si $X \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es diferenciable para toda parametrización $\mathbf{x}$ de S.*

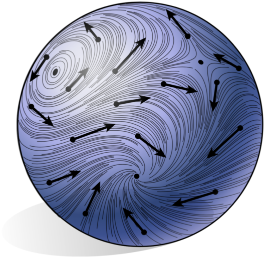
Escribimos

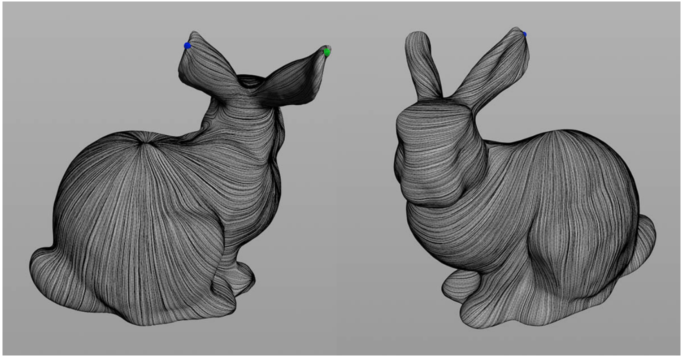
$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \sum_i \xi_i \, \mathbf{x}_i, \qquad X(\mathbf{p}) = \big(\xi_1(\mathbf{p}), \ldots, \xi_n(\mathbf{p})\big),$$

la representación de X en la base canónica local de $T_{\mathbf{p}}S$. X es **de clase** C^k, si las $\xi_i = \xi_i(\mathbf{p})$ son todas de clase C^k.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Campos Tangentes





Ejemplos de campos vectoriales tangentes a superficies.

La Derivada Covariante

Recordemos de cálculo que en un espacio ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$ tenemos la noción de derivada direccional (de funciones)

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Nos interesa desarrollar una noción de derivada direccional para campos vectoriales. En el caso de superficies, esta derivada aplicada a campos tangenciales (en el plano tangente), puede tener una componente normal, y perdería el carácter intrínseco.

El concepto de *derivada covariante* pretende dar una noción de derivada direccional, pero manteniento la propiedad intrínseca.

Definición

Sea $Y : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial diferenciable , y sea X un vector direccional sobre un punto $\mathbf{p} \in U$ fijo, esto es $(\mathbf{p}, X) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^{n+1}$. La expresión

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{Y(\mathbf{p} + tX) - Y(\mathbf{p})}{t}$$

*se llama la **derivada direccional** de Y en la dirección de X.*

Propiedad

$D_X Y(\mathbf{p})$ está unicamente determinada por el valor de Y a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$, con $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y $\gamma'(0) = X$:

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(Y \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{Y(\gamma(t)) - Y(\mathbf{p})}{t}.$$

Consecuencias:

- Las derivadas parciales de Y corresponden al caso $X = \mathbf{e}_i$, con $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Tenemos así $D_{\mathbf{e}_i}Y = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$.
En particular, si $X = \sum_i X_i \mathbf{e}_i$, entonces

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \sum_i X_i D_{\mathbf{e}_i} Y = \sum_i X_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}.$$

- Para una hiperficie n-dimensional S, dada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ denotemos Y un campo vectorial diferenciable a lo largo de $\mathbf{x}$, y X un vector tangente a $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q}) \in S$. Entonces,

$$D_X Y(\mathbf{p}) = D_{(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p})\cdot X} Y(\mathbf{q}) = \lim_{t \to 0} \frac{\big(Y(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X\big) - Y(\mathbf{q})}{t}.$$

La Derivada Covariante

En este caso, $\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X)$ es una curva sobre S tal que $\gamma'(0) = X$.

- La derivada de una función en la dirección de la i-ésima coordenada u_i es precisamente $D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \mathbf{x}_i$.
  Se sigue que

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y(u_1, \ldots, u_i + t, \ldots, u_n) - Y(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)\big).$$

En particular,

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Definición

Si X, Y son campos vectoriales tangentes a una hiperficie S, parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^T = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N,$$

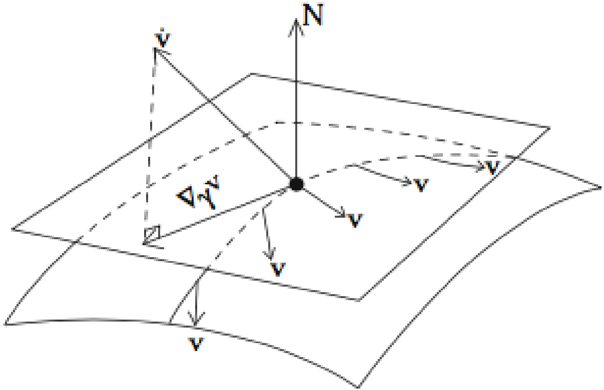
donde N es el campo normal unitario a S, se llama la ***derivada covariante*** *de Y en la dirección de X.*

Obs! $\nabla_X Y$ es también un campo vectorial tangente. La componente normal a $D_X Y$ es la segunda forma fundamental de **x**, ya que la igualdad $\langle Y, N \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle D_X Y, N \rangle = II(X, Y)$. En consecuencia $\langle D_X Y, N \rangle = -\langle Y, D_X N \rangle$.

Podemos escribir entonces

$$D_X Y = D_X Y^T + D_X Y^{\perp} = \nabla_X Y + II(X, Y) N.$$

La Derivada Covariante



La derivada covariante $\nabla_\gamma \mathbf{v}$ sobre S.

La Derivada Covariante

<u>Observaciones</u>:

- En el libro de Do Carmo, la derivada covariante se denota por D.
- Es importante diferenciar entre ambos operadores diferenciales D y ∇ (derivada direccional y derivada covariante): D está definida para campos vectoriales en el espacio ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$, mientras que ∇ sólo está definida para campos vectoriales tangentes a S.
- Para una función escalar φ, se tiene $D_X\varphi = \nabla_X\varphi$ (en general para campos vectoriales, $D_XY \neq \nabla_XY$).
  Podemos multiplicar tales funciones escalares, punto a punto, con campos vectoriales:

$$\varphi X \;\text{ denota }\; \mathbf{p} \to (\varphi X)(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p})\,X(\mathbf{p}).$$

Proposición (Propiedades de D y de ∇)

1.
$$\begin{aligned} D_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 D_{X_1} Y + \varphi_2 D_{X_2} Y, \\ \nabla_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 \nabla_{X_1} Y + \varphi_2 \nabla_{X_2} Y. \end{aligned} \qquad \textit{(linealidad)}$$

2.
$$\begin{aligned} D_X(Y_1 + Y_2) &= D_X Y_1 + D_X Y_2, \\ \nabla_X(Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2. \end{aligned} \qquad \textit{(aditividad)}$$

3.
$$\begin{aligned} D_X(\varphi Y) &= \varphi D_X Y + D_X \varphi Y, \\ \nabla_X(\varphi Y) &= \varphi \nabla_X Y + \nabla_X \varphi Y. \end{aligned} \qquad \textit{(regla del producto)}$$

4.
$$\begin{aligned} D_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle D_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, D_X Y_2 \rangle, \\ \nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle. \end{aligned} \qquad \textit{(regla de Leibniz)}$$

La Derivada Covariante

La conmutatividad falla: en general $D_X Y \neq D_Y X$ y $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$.

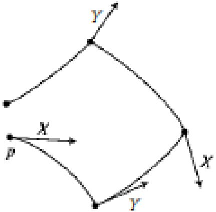
Ejemplo: Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, con coordenaas (x_1, x_2).
Observe que $D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j = 0$.
Eligiendo $X = x_1\mathbf{e}_2 = (0, x_1)$, y $Y = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, se tiene

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{x_1\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 = x_1 D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 = 0, \\ D_Y X &= D_{\mathbf{e}_1}(x_1\mathbf{e}_2) = x_1 D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2 + D_{\mathbf{e}_1}x_1\mathbf{e}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Definición

*Para dos campos vectoriales X, Y sobre una hiperficie S, definimos el **corchete de Lie** (Lie bracket) de X y Y como*

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

La Derivada Covariante

- Si X, Y son campos tangentes, se tiene $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
- Si $\mathbf{x}$ es de clase C^2, vale

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}\right] = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_j \partial u_i} = 0.$$

- En coordenadas arbitrarias, si $X = \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, $Y = \sum_i \eta_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}.$$

  Esto se abrevia por $[X, Y]_j = X(Y_j) - Y(X_j)$.
- Una condición necesaria para que X y Y sean campos base $X = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, $Y = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$ (i.e. formen una base en cada punto de S) es que $[X, Y] = 0$.

Teorema

La derivada covariante ∇ es una cantidad intrínseca: sólo depende de la primera forma fundamental.

Prueba:
Sean $X = \sum_j \xi_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$, $Y = \sum_j \eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$. Para determinar $\nabla_X Y$, es suficiente conocer $\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \rangle$, $\forall k$. De las propiedades de ∇ tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i \xi_i \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} Y = \sum_i \xi_i \sum_j \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \left(\eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} + \eta_j \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right).
\end{aligned}$$

La Derivada Covariante

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\Big\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}\Big\rangle &= \sum_{i,j} \xi_i \Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \Big\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \Big\rangle + \eta_j \Big\langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \Big\rangle \Big) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle + \eta_j \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle \Big) = \sum_{i,j} \xi_i \Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta_j \Gamma_{ij,k} \Big)\end{aligned}$$

Se suele usar la notación $\Gamma_{ij,k} = \langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle$. Ya mostramos (ver Aula 23) que

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} \big). \;\square$$

Obs! En la notación de Einstein, esto es $\langle \nabla_X Y, \mathbf{x}_k \rangle = \xi^i \big(\frac{\partial \eta^j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta^j \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} \big)$.

Para hiperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos

Definición

i) *Las cantidades* $$\Gamma_{ij,k} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle,$$

se llaman los ***símbolos de Christoffel del primer tipo***.

ii) *Las cantidades* Γ_{ij}^k *definidas por*
$$\mathbf{x}_{ij}^T = \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k},$$

se llaman los ***símbolos de Christoffel del segundo tipo***.

Obs! Vimos que (Aula 23), estas cantidades satisfacen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ y $\Gamma_{ij,k} = \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k}$.

Símbolos de Christoffel

En consecuencia,

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial u_i} + \sum_j \eta_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}. \tag{1}$$

En notación compacta, esto es

$$\nabla_X Y = \xi^i \left(\tfrac{\partial \eta^k}{\partial u_i} + \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.$$

Ecuación de las geodésicas

Consideremos ahora $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva diferenciable sobre una superficie S, parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, y sea $\alpha(0) = \mathbf{p}$.

Definición

*Sea X un campo vectorial tangente a S. La **derivada covariante** de X a lo largo de α es*

$$\nabla_\alpha X(\mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{X(\alpha(t)) - X(\mathbf{p})}{t}.$$

En particular, como α' define un campo vectorial tangente a S, definido sobre la trayectoria de α, podemos escribir

$$\nabla_\alpha \alpha' = (\alpha'')^T, \quad \text{la componente tangencial de la aceleración de } \alpha.$$

Ecuación de las geodésicas

De la teoría de geodésicas desarrollada en la clase anterior (Aula 25), tenemos

Teorema (Caracterización de las geodésicas)

$\alpha : [a, b] \to S$ es una geodésica, si y sólo si,

$$\nabla_\alpha \alpha'(t) = 0, \;\; \forall t \in [a, b].$$

<u>Prueba</u>: Basta recordar que

$$\alpha \text{ es geodésica } \Leftrightarrow \; \alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}S^\perp \; \Leftrightarrow \; \nabla_\alpha \alpha'(t) = (\alpha''(t))^T = 0, \;\; \forall t. \; \square$$

Ecuación de las geodésicas

Sean $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, y $\alpha(t) = \sum_i a_i(t)\mathbf{e}_i$ las coordenadas de la curva α. Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha X &= ((X \circ \alpha)'(t))^T = \Big(\sum_i [\xi_i \, \mathbf{x}_i \, (\alpha(t))]' \Big)^T \\
&= \sum_i \Big(\xi_i' \, \mathbf{x}_i(\alpha(t)) + \xi_i \sum_j (\mathbf{x}_i)_j \, a_j'(t) \Big)^T \\
&= \sum_i (\xi_i' \, \mathbf{x}_i)^T(\alpha(t)) + \sum_{i,j} \big(\xi_i \, a_j'(t) \, \mathbf{x}_{ij}\big)^T \\
&= \sum_k \xi_k' \, \mathbf{x}_k + \sum_{i,j} \xi_i \, a_j' \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k \\
&= \sum_k \Big(\xi_k' + \sum_{i,j} \xi_i \, a_j' \Gamma_{ij}^k \Big) \mathbf{x}_k .
\end{aligned}$$

Ecuación de las geodésicas

En particular, cuando $X = \alpha'$, se tiene que

$$\nabla_\alpha \alpha' = \sum_k \Big(a_k'' + \sum_{i,j} a_i' \, a_j' \Gamma_{ij}^k \Big) \mathbf{x}_k.$$

Hemos probado

Corolario (Ecuación de las Geodésicas)

Una curva $\alpha : [a, b] \to S$ es una geodésica, si y sólo si

$$\sum_k \Big(a_k'' + \sum_{i,j} a_i' \, a_j' \, \Gamma_{ij}^k \Big) \mathbf{x}_k = 0. \tag{2}$$

Esto es, α es geodésica $\Leftrightarrow$ vale el sistema de EDO $\boxed{a_k'' + \Gamma_{ij}^k (a^i)'(a^j)' = 0}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ecuación de las geodésicas

Geodesic Equation of Motion

Curvature of trajectory

Generalized gradient

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Path length element

Christoffel symbol