Geodésicas I

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 25) 23.abril.2021

La vecindad tubular

Sea S una superficie. Dado que $\mathbb{R}^3$ es un espacio métrico, las vecindades más fáciles de construir para S son los llamados vecindarios métricos

$$B_\delta(S) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \ \text{dist}(\mathbf{p}, S) < \delta\},$$

donde $\text{dist}(\mathbf{p}, S) = \inf_{\mathbf{q} \in S} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$.

Está claro que $B_\delta(S)$ es una vecindad abierta de S para cada $\delta > 0$. Una primera observación es que estas vecindades consisten en segmentos de líneas normales con longitud 2δ centrada en los puntos de la superficie. (Lema 4.23 en el libro de Montiel y Ros).

Esta descripción geométrica de las vecindades métricas de un superficie sugiere lo siguiente:

La vecindad tubular

Si podemos arreglar que los segmentos de rectas normales involucradas no se cruzan, entonces podremos establecer que estos vecindarios son productos topológicos de la superficie y un intervalo de $\mathbb{R}$. Esto, de hecho, puede hacerse si el radio es lo suficientemente pequeño.

Para una superficie orientable S, esto se puede hacer mediante el mapa $F : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$F(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + tN(\mathbf{p}), \quad \forall (\mathbf{p}, t) \in S \times \mathbb{R},$$

donde $N : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es un mapa de Gauss de S. Este mapa F es diferenciable, y envía cada par $(\mathbf{p}, t)$ al punto a la distancia t en la línea normal de S en $\mathbf{p}$, en el lado de la superficie a la que apunta $N(\mathbf{p})$. De ahí que

$$F(S \times (-\delta, \delta)) = N_\delta(S) = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} N_\delta(\mathbf{p}), \quad \forall \delta > 0.$$

La vecindad tubular

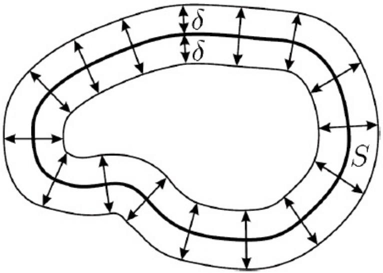
Ahora, que los segmentos normales de radio δ no se toquen entre sí es equivalente a que el mapa F sea inyectivo en $S \times (-\delta, \delta)$.

Definición

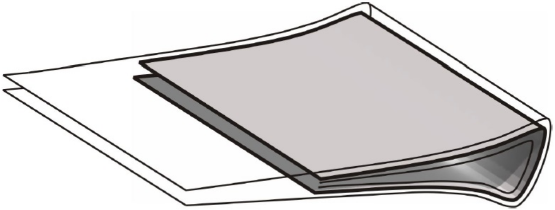
*La unión $N_\delta(S)$ de todos los segmentos normales de radio $\delta > 0$ centrados en los puntos de una superficie orientable S se llama la **vecindad tubular** de radio $\delta > 0$ si esta es abierta como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.*
En ese caso, el mapa $F : S \times (-\delta, \delta) \to N_\delta(S)$ es un difeomorfismo.

$N_\delta(S)$ viene acompañado de dos proyecciones $\pi_1 : N_\delta(S) \to S$ dada por $(\mathbf{p}, t) \to \mathbf{p}$, y $\pi_2 : N_\delta(S) \to \mathbb{R}^3$ dada por $(\mathbf{p}, t) \to tN(\mathbf{p})$.
Las superficies $S^t = S + tN = \pi_2(\cdot, t)$ son las *superficies paralelas* a S.

La vecindad tubular



La vecindad tubular $N_\delta(S)$.



Vecindad tubular de una superficie.

(Para más detalles, ver capítulo 4 de libro de Montiel y Ros.)

Variación de curvas

Queremos estudiar ahora las curvas sobre una superficie S que minimizan (localmente) la longitud de arco.

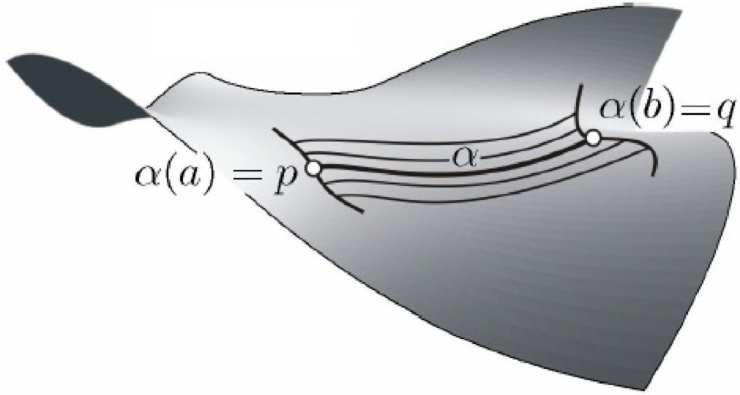
Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, y sea $\alpha : [a, b] \to S$, una curva sobre S. Una ***variación*** *de la curva α es un mapa diferenciable $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$, $\forall s \in [a, b]$.*

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tenemos una curva $F_t : [a, b] \to S$ dada por $F_t(s) = F(s, t)$. F_t se llama una ***curva longitudinal*** *de la variación F.*

Cuando todas estas curvas tiene extremos comunes, esto es, $F(a, t) = \mathbf{p}$, $F(b, t) = \mathbf{q}$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, decimos que la variación F es ***propia****.*

Variación de curvas



Variación de una curva α sobre S.

Variación de curvas

Asociado a una variación F, definimos $V : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ por

$$V(s) = \frac{\partial F}{\partial t}(s, 0) = \frac{d}{dt}F(s, t)\Big|_{t=0}.$$

V es también diferenciable, y además, $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, $\forall s \in [a, b]$. El mapa V se llama el **campo variacional** de F. Claramente, si F es propia, entonces $V(a) = V(b) = 0$.

Mostramos ahora que las variaciones y sus campos variacionales asociados mantienen una relación más profunda.

Proposición

Sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre S, y $V : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un mapa diferenciable tal que $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, $\forall s \in [a, b]$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una variación $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de α cuyo campo variacional es V. Más aún, si $V(a) = V(b) = 0$, F puede elegirse propia.

Prueba: Como el trazo $K = \alpha([a, b])$ es un compacto en S, existe una vecindad $K \subset W \subseteq S$ y un número $\delta > 0$ tales que existe una proyección diferenciable $\pi : N_\delta(W) \to W$ proveniente de la vecindad tubular $N_\delta(W)$.

Como $N_\delta(W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^3$ que contiene al compacto K, existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{p}, K) < \varepsilon' \;\Rightarrow\; \mathbf{p} \in N_\delta(W)$. Hacemos $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1+M}$, $M = sup_{s\in[a,b]}|V(s)|$.

Variación de curvas

Así, si $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se tiene

$$\mathrm{dist}(\alpha(s) + tV(s), K) \leq |tV(s)| = t|V(s)| \leq \varepsilon' M < \varepsilon, \quad \forall s \in [a, b].$$

Luego $\alpha(s) + tV(s) \in N_\delta(W)$, $\forall (s, t) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definimos la variación requerida como $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ como

$$F(s, t) = \pi\big(\alpha(s) + tV(s)\big), \quad \forall [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

F es diferenciable, y si $t = 0$, se tiene $F(s, 0) = \pi(\alpha(s)) = \alpha(s)$, ya que $\alpha(s) \in S$. El campo variacional es

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, 0) = \frac{d}{dt}\pi\big(\alpha(s) + tV(s)\big)\Big|_{t=0} = D\pi_{\alpha(s)} \cdot V(s) = V(s),$$

ya que $\alpha(s) \in S$, $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$, y $D\pi$, restricta al plano tangente sobre puntos de la superficie, es la identidad.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Finalmente, si $V(a) = V(b) = 0$, entonces

$$F(a, t) = \pi(\alpha(a) + tV(a)) = \pi(\alpha(a)) = \alpha(a),$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Análogamente $F(b, t) = \pi(\alpha(b) + tV(b)) = \alpha(b)$, $\square$

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientable, $\mathbf{p} \in S$. Dado un vector $\mathbf{v}$ anclado a $\mathbf{p}$, definimos la **componente tangencial** $\mathbf{v}^T$ del $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$ como la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el plano tangente T, y la **componente normal** como la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el segmento normal $\langle N(\mathbf{p})\rangle$:*

$$\mathbf{v}^T = \operatorname{proj}_{T_\mathbf{p}S} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^\perp = \operatorname{proj}_{N(\mathbf{p})} \mathbf{v}.$$

Obs! Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se descompone como $\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^\perp$.

Variación de curvas

Asociamos a cada variación $F : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de la curva $\alpha = F_0$ una función $L_F : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$L_F(t) = \ell_a^b(F_t) = \int_a^b |F_t'(s)|\, ds = \int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right| ds.$$

Esta es la **función de longitud** (de arco) de la varaición F. Observe que $L_F(0) = \ell_a^b(\alpha)$ para cada variación F.

Ahora suponga que α está parametrizada por longitud de arco. Definimos $G : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$G(s,t) = \left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right|.$$

G es continua y $G(s,0) = |\alpha'(s)| = 1 > 0$, $\forall s \in [a,b]$. Por la continuidad de

G, existe δ con $0 < \delta < \varepsilon$ y tal que $|t| < \delta \Rightarrow G(s,t) > 0, \forall s \in [a,b]$. Entonces $G|_{[a,b]\times(-\delta,\delta)} > 0$ y diferenciable. En consecuencia, la longitud de la variación F, restricta a $L_F : [a,b] \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

$$L_F'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right| ds = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(s,t)\, ds,$$

para todo $t \in (-\delta,\delta)$.

El propósito ahora es calcular $L_F(0)$. Para ello, observe que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,0) = \Big\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} \Big\rangle (s,0), \quad \forall s \in [a,b]. \tag{1}$$

(pues $\frac{\partial}{\partial t} G = \frac{\partial}{\partial t}|F'| = \frac{\partial}{\partial t}\langle F', F'\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{2\langle \partial_t F', F'\rangle}{|F'|} = \langle \partial_{ts}^2 F, \partial_s F\rangle$).

Teorema (Primera variación de la longitud)

Sea $\alpha : [a,b] \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco, y sea $F : [a,b] \times (-\delta,\delta) \to S$ una variación de α. Si L_F es la función de longitud, entonces

$$L_F'(0) = \langle V(b), \alpha'(b)\rangle - \langle V(a), \alpha'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\, ds.,$$

<u>Prueba</u>: De (1)

$$\begin{aligned} L_F'(0) &= \int_a^b \Big\langle \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s}, \frac{\partial F}{\partial s}\Big\rangle(s,0)\, ds \\ &= \Big\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s}\Big\rangle\Big|_{(a,0)}^{(b,0)} - \int_a^b \Big\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\Big\rangle(s,0)\, ds \\ &= \langle V(b), \alpha'(b)\rangle - \langle V(a), \alpha'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\, ds \end{aligned}$$

(Recordar que $\frac{\partial F}{\partial s}(s,0) = \alpha(s)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s,0) = \alpha''(s)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) = V(t)$). $\square$

Geodésicas

Estamos interesados en caracterizar las geodésicas sobre S, esto es las curvas que localmente minimizan la longitud de arco. Esto lo podemos caracterizar en términos de la función de longitud L_F.

Corolario (Caracterización de las geodésicas)

Una curva regular $\alpha : [a, b] \to S$ sobre una superficie S tiene longitud crítica, esto es

$$L_F'(0) = 0,$$

para toda variación propia F si, y sólo si, $\alpha''(s) \perp \alpha(s)$, $\forall s \in [a, b]$, o equivalentemente $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)}S^{\perp}$.
En otras palabras, si y sólo si, su aceleración tangencial $\alpha''(s)^T$ es proporcional a la velocidad $\alpha(s)$. Si α está parametrizada por longitud de arco, esto es equivalente al hecho que $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s$.

Prueba: Suponga que está parametrizada por longitud de arco $|\alpha'(s)|^2 = 1$, y la aceleración $\alpha''(s)$ es perpendicular a $\alpha'(s)$, pues $2\langle\alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = \frac{d}{ds}|\alpha'(s)|^2 = 0$, $\forall s$.
De ahí que las condiciones $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$ y $\alpha''(s)^T = 0$ sean equivalentes.

$(\Rightarrow)$ Por el Teorema de Primera Variación, si $L_F'(0) = 0$ para toda variación propia de α, entonces

$$\int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle \, ds = 0,$$

y de la proposición previa, existe una variación propia cuyo campo variacional es $V(s) = h(s)\alpha''(s)^T$, donde h es alguna función difefrenciable en $[a, b]$, positiva en (a, b), y con $h(a) = h(b) = 0$. Luego,

$$\int_a^b h(s)|\alpha''(s)^T|^2\, ds = 0.$$

De ahí que $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s$ y la aceleración $\alpha''(s) \in T_{\alpha(s)}S^\perp$.

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente, si la curva α está parametrizada por longitud de arco, y satisface $\alpha''(s)^T = 0$, $\forall s \in [a, b]$, entonces la fórmula de la primera variación de la longitud implica que

$$\int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle\, ds = 0,$$

pues $V(s) \in T_{\alpha(s)}S$. Portanto, $L_F'(0) = 0$ para toda variación propia F de α. $\square$

Definición

*Una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \to S$ sobre una superficie regular S se llama una **geodésica** si*

$$\alpha''(s) \perp T_{\alpha(s)}S, \quad \forall s \in [a, b].$$

Obs!:

- Desde el punto de vista físico, sobre la superficie, una geodésica es el camino de una partícula que no está sujeta a ninguna perturbación exterior, y actua sólo bajo las leyes de Newton.

- Una geodésica, puede o no satisfacer la propiedad de minimizar la longitud de arco desde a hasta b. (No lo requiere la definición).

Propiedad

Si $\alpha : [a, b] \to S$ es geodésica, entonces $\frac{d}{ds}|\alpha'(s)|^2 = 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = 0$. Luego, toda geodésica posee rapidez (magnitud) constante. $\square$

En consecuencia, toda geodésica o es una curva constante, o está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco.

Obs!

- Ser geodésica no es una propiedad geométrica (es una propiedad de curvas que depende de la parametrización). Al contrario, es una propiedad física.
- Si reparametrizamos una geodésica, la nueva curva obtenida también es geodésica si, y sólo si, la reparametrización es homotética.

Teorema (Invarianza por isometrías)

Sea $T : S \to S'$ una isometría local entre dos superficies S y S', y sea $\alpha : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre S. Entonces α es una geodésica sobre S si, y sólo si, $\alpha' = T \circ \alpha$ es una geodésica sobre S'.

<u>Prueba</u>:
Si α es geodésica sobre S, sea $G : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to S'$ una variación de α' sobre S', con $\delta > 0$. Entonces, $F = T^{-1} \circ G$ es una variación de α.
Mas aún, como T^{-1} preserva longitudes, se tiene que

$$L_F(t) = \ell_a^b(F_t) = \ell_a^b(T^{-1} \circ G_t) = \ell_a^b(G_s) = L_G(t),$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Luego, $L_G'(0) = L_F'(0) = 0$ y $\alpha' = T \circ \alpha$ es geodésica en S'. La recíproca se prueba igual, intercambiando S por S', y usando T^{-1} en lugar de T. $\square$

Ejemplos

Ejemplo 1: (Geodésicas en el plano)

Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ el plano de los vectores ortogonales a un vector unitario fijo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Si $\alpha : [a, b] \to S$ es una curva diferenciable arbitraria en S, tenemos $\langle \alpha'(t), \mathbf{n} \rangle = 0$, para cada $t \in [a, b]$.

Derivando dos veces, entonces $\langle \alpha''(t), \mathbf{n} \rangle = 0$, es decir, $\alpha(t) \in S = T_{\alpha(t)}S$, $\forall t \in [a, b]$. En particular $\alpha''(s)^T = \alpha''(s)$
Por tanto, α es geodésica si, y sólo si, $\alpha'' = (\alpha'')^T = \mathbf{0}$. Ya sabemos que la solución a esta EDO es, $\alpha(t) = t\mathbf{p} + \mathbf{q}$.

Por lo tanto, las geodésicas de un plano son sólo sus rectas (o segmentos de recta) parametrizadas proporcionalmente a la longitud del arco.

Ejemplo 2: (Geodésicas en la esfera)

Sea $\alpha : [a, b] \to S_r^2$ una curva diferenciable sobre la esfera de radio $r > 0$, S_r^2, parametrizada por longitud de arco.

Tenemos $|\alpha(t) - \mathbf{p}|^2 = r^2$, para todo t. Diferenciando dos veces esta expresión, $2\langle\alpha'(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; 2(\langle\alpha''(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle + \langle\alpha'(t), \alpha'(t)\rangle) = 0 \;\Rightarrow\; \langle\alpha''(t), \alpha(t) - \mathbf{p}\rangle = -1$. Como el plano $T_{\alpha(t)}S_r^2$ es el complemento ortogonal de $\alpha(s) - \mathbf{p}$, entonces

$$\alpha''(t)^T = \alpha''(t) + \tfrac{1}{r^2}(\alpha(t) - \mathbf{p}).$$

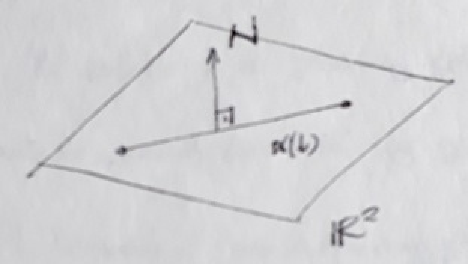
Luego, α es geodésica $\Leftrightarrow$

$$r^2\alpha''(t) + \alpha(t) - \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad |\alpha'(t)|^2 = 1.$$

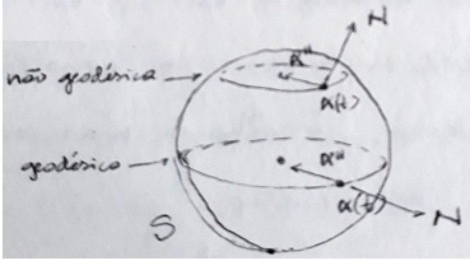
Las soluciones a esta ecuación son

$$\alpha(t) = \mathbf{p} + \mathbf{c}_1 \cos(\tfrac{t}{r}) + \mathbf{c}_2 \sin(\tfrac{t}{r}), \quad \text{con } |\mathbf{c}_1|^2 = r^2,\ |\mathbf{c}_2|^2 = 1,\ \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle = 0.$$

Así, las geodésicas en S^2 corresponden a los grandes círculos con rapidez constante (círculos por el ecuador de la esfera).



Geodésicas en un plano.

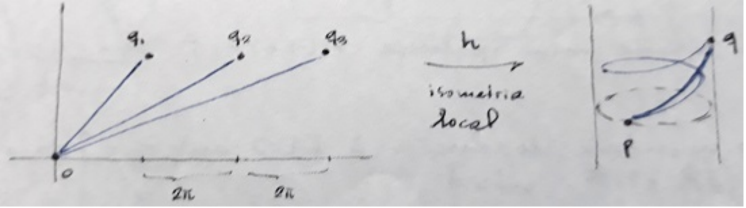


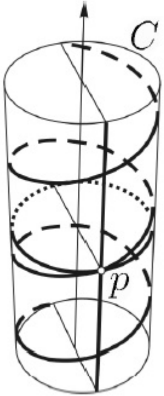
Geodésicas en una esfera.

Ejemplos

Ejemplo 3: (Geodésicas en el cilindro)

Aquí usaremos isometría local entre un cilindro y un plano (ya vimos que las geodésicas son invariantes por isometría).





Bajo la isometría usual, las rectas del plano se convierten en rectas verticales o hélices sobre el cilindro.

Ejemplos

Al transformar las rectas del plano sobre el cilindro, estas se vuelven rectas verticales o hélices. Estas son las dos posibles geodésicas sobre un cilindro.

También es posible mostrar esto de forma analítica: Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva sobre el cilindro (de radio 1), entonces α es geodésica $\Leftrightarrow$

$$(x', y', z') \perp T_{(x,y,z)}S \;\Leftrightarrow\; (x'', y'', z'') = k(x, y, 0),$$

y es posible mostar que en el caso $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ esto conduce a

$$z(t) = bt, \;\; x''(t) + a^2 x(t) = 0, \;\; y''(t) + b^2 y(t) = 0, \;\; a^2 + b^2 = 1.$$

Las soluciones son de la forma

$$\alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt), \;\; a^2 + b^2 = 1.$$