Geometría Intrínseca de Superficies II

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 24) 16.abril.2021

Observaciones:

- La curvatura media H no es una cantidad intrínseca. Por ejemplo, el plano y el cilindro son superficies localmente isométricas, pero $H_{plano} = 0$, mientras que $H_{cilindro} = \frac{1}{2r}$.

- Las condiciones de compatibilidad (3.) y (4.) conducen a las **ecuaciones de Mainardi-Codazzi**

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) - g\Gamma_{21}^2. \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Bonnet / Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies)

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto conexo. Dadas funciones diferenciables $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$, con $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, y que satisfacen las condiciones de compatibilidad (1-4), y dado un punto $\mathbf{q} \in U$.

Entonces existe una vecidad $V \subseteq U$ de $\mathbf{q}$, y una parametrización $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^3$ tal que E, F, G y e, f, g son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental asociada a $\mathbf{x}$.
Mas aún, si $\widetilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^3$ es otra parametrización con los mismos coeficientes E, F, G, e, f, g, entonces existe un movimiento rígido $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\widetilde{\mathbf{x}} = T \circ \mathbf{x}$.

Teorema de Bonnet

Esquema de Prueba: Comenzamos con un resultado preliminar

Lema (Existencia y unicidad para EDP's)

Sean $\zeta : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $f_i : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *funciones de clase* C^2 *que satisfacen el sistema de EDPs*

$$f_{ij} + f_{i\ell}\,\zeta^{\ell}{}_{j} = f_{ji} + f_{j\ell}\,\zeta^{\ell}{}_{i}, \quad 1 \leq i \leq k,\; 1 \leq j \leq n. \tag{1}$$

y dado un punto inicial $(\mathbf{x}_0, \zeta_0) \in U \times \mathbb{R}^n$, *entonces existe una vecindad* $V \subseteq U$ *de* $\mathbf{x}_0$ *y una única función* $\zeta : V \to \mathbb{R}^n$ *solución del problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i^{(\ell)}(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x})), \;\; 1 \leq i \leq k,\; 1 \leq \ell \leq n; \\ \zeta(\mathbf{x}_0) = \zeta_0. \;\square \end{cases} \tag{2}$$

Suponga que las funciones $\zeta : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $f_i : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ satisfacen el sistema de EDPs

$$\frac{\partial \zeta_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i^{(\ell)}(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x})), \quad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq \ell \leq 3, \tag{3}$$

donde la ζ y las f_i son clase C^2. Entonces, estas cumplen las ecuaciones

$$f_{ij}(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x})) + \frac{\partial f_i}{\partial \zeta^\ell}\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial x_j} = f_{ji} + \frac{\partial f_j}{\partial \zeta^\ell}\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3. \tag{4}$$

Escribimos $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^9$ la solución que describe el triedro local $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, esto es $\zeta(u, v) = (\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), N(u, v)) \in \mathbb{R}^9$, con

$$\begin{cases} \zeta_u = (\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vu}, N_u), \\ \zeta_v = (\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}, N_v), \end{cases} \tag{5}$$

ecuaciones en términos de los coeficientes Γ_{ij}^k, h_{ij} y ${a^j}_i$, y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi como ecuaciones de compatibilidad.

Elegimos como condición inicial el punto $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0) \in U$, y $\zeta_0 = (\mathbf{x}_u(\mathbf{q}_0), \mathbf{x}_v(\mathbf{q}_0), N(\mathbf{q}_0)) = (\zeta_{10}, \zeta_{20}, \zeta_{30})$, tales que

$$\begin{gathered} \langle \zeta_{10}, \zeta_{10} \rangle = E, \ \langle \zeta_{10}, \zeta_{20} \rangle = F, \ \langle \zeta_{20}, \zeta_{20} \rangle = G, \\ \langle \zeta_{10}, \zeta_{30} \rangle = 0, \ \langle \zeta_{20}, \zeta_{30} \rangle = 0, \ \langle \zeta_{30}, \zeta_{30} \rangle = 1, \end{gathered}$$

y

$$\zeta_{30} = \frac{\zeta_{10} \times \zeta_{20}}{|\zeta_{10} \times \zeta_{20}|}.$$

Teorema de Bonnet

Por el Teorema de existencia y unicidad para EDPs, sabemos que el sistema (5) admite solución única en una vecindad $V \subseteq U$ de $\mathbf{q}_0$. Denotamos esta solución por ζ.

Consideramos el sistema $\mathbf{x}_u = \zeta_1$, $\mathbf{x}_v = \zeta_2$ y verificamos las ecuaciones de compatibilidad $\zeta_{1v} = \zeta_{2u}$ a partir del sistema de EDPs (5). Eligiendo $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0)$ como condición inicial, resolvemos el problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u = \zeta_1, \ \mathbf{x}_v = \zeta_2, \\ \mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}_0. \end{cases}$$

(este problema también tiene solución en V debido al teorema de existencia y unicidad de EDPs).

Teorema de Bonnet

Luego, verificamos que $\mathbf{x}$ es parametrización.

Conseramos ahora el sistema

$$\begin{array}{lll} \eta_1 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \zeta_1, & \eta_2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \zeta_2, & \eta_3 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \zeta_3, \\ \eta_4 = \langle \mathbf{x}_u, \zeta_3 \rangle, & \eta_5 = \langle \mathbf{x}_v, \zeta_3 \rangle, & \eta_6 = \langle \zeta_3, \zeta_3 \rangle, \end{array}$$

con

$$\eta_{iv} = \eta_{jv}.$$

Finalmente, se revisa que $E = \eta_1$, $F = \eta_2$ $G = \eta_3$, $0 = \eta_4$, $0 = \eta_5$ y $1 = \eta_6$ es una solución del sistema anterior.
Por unicidad de la solución, E, F, G, e, f, g debe ser los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de $\mathbf{x}$ en todo punto.

Teorema de Bonnet

Ahora, en caso de existir otra parametrización $\widetilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^3$ que satisface las mismas condiciones de la hipótesis para **x**, la prueba de la "unicidad" a menos de movimientos rígidos es similar a la indicada en el caso de curvas:

- tomamos para el tiempo inicial t_0 de la condición inicial, los triedros
$$\zeta(\mathbf{q}_0) = (\mathbf{x}_u(\mathbf{q}_0), \mathbf{x}_v(\mathbf{q}_0), N(\mathbf{q}_0)), \quad \widetilde{\zeta}(\widetilde{\mathbf{q}}_0) = (\widetilde{\mathbf{x}}_u(\widetilde{\mathbf{q}}_0), \widetilde{\mathbf{x}}_v(\widetilde{\mathbf{q}}_0), \widetilde{N}(\widetilde{\mathbf{q}}_0)).$$
- definimos $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el cambio de base que lleva el triedro $\zeta(\mathbf{q}_0)$ en $\widetilde{\zeta}(\widetilde{\mathbf{q}}_0)$, y definimos la transformación rígida $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por
$$T(\mathbf{p}) = (\widetilde{\zeta}(\widetilde{\mathbf{q}}_0) - \zeta(\mathbf{q}_0)) + M(\mathbf{p}).$$
- Extendemos a todo el dominio U de la solución ζ y mostramos que T preserva los triedros locales en todo punto. $\square$

Ejemplo 1: (Cilindro de radio r) Consideramos la parametrización del cilindro $\mathbf{x}(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$.
Tenemos $\mathbf{x}_u = (-r\sin u, r\cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (0,0,1) \Rightarrow\ E = r^2$, $F = 0$, $G = 1$.
Luego

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos la ecuación de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{\ell k}\big(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\big).$$

Luego

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{1} &= \tfrac{1}{2} g^{11}\big(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\big) + \tfrac{1}{2} g^{21}\big(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}\big) \\ &= \tfrac{1}{2}(r^{-2})\,(0+0-0) + \tfrac{1}{2}(0)\,(0+0-0) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplos

De igual forma, $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ son todos 0.

Ejemplo 2: (Esfera de radio r) Consideramos la parametrización de la esfera $\mathbf{x}(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v)$.
$\Rightarrow, \mathbf{x}_u = (-r \sin v \sin u, r \sin v \cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, -r \sin v)$
$\Rightarrow \; E = r^2 \sin^2 v$, $F = 0$, $G = r^2$. Luego

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{\ell k} \big(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij} \big),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \tfrac{1}{2} g^{11} \big(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11} \big) + \tfrac{1}{2} g^{21} \big(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11} \big) \\ &= \tfrac{1}{2} (g^{11}) \, (0 + 0 - 0) + \tfrac{1}{2} (0) \, (0 + 0 - \partial_2 g_{11}) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{2} &= \tfrac{1}{2}g^{12}\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) + \tfrac{1}{2}g^{22}\left(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}(0)\,(0+0-0) + \tfrac{1}{2}(g^{22})\,(0+0-\partial_2 g_{11}) = \tfrac{1}{2r^2}(-2r^2\sin v\cos v) = -\sin v\,\mathrm{co}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{12}^{1} &= \tfrac{1}{2}g^{11}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{21}\right) + \tfrac{1}{2}g^{21}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}(g^{11})\,(0+\partial_2 g_{11}-0) + \tfrac{1}{2}(0)\,(0+0-0) = \frac{1}{2r^2\sin^2 v}(2r^2\sin v\cos v) = \frac{\cos v}{\sin v}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{12}^{2} &= \tfrac{1}{2}g^{12}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{21}\right) + \tfrac{1}{2}g^{22}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}(0)\,(0+\partial_2 g_{11}-0) + \tfrac{1}{2}(g^{22})\,(0+0-0) = 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \tfrac{1}{2}g^{11}\big(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}\big) + \tfrac{1}{2}g^{21}\big(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\big)\\
&= \tfrac{1}{2}(g^{11})\,(0+0-0) + \tfrac{1}{2}(0)\,(0+0-0) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \tfrac{1}{2}g^{12}\big(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}\big) + \tfrac{1}{2}g^{22}\big(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\big)\\
&= \tfrac{1}{2}(0)\,(0+0-0) + \tfrac{1}{2}(g^{22})\,(0+0-0) = 0.
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora la curvatura de Gauss

$$
\begin{aligned}
K &= -\tfrac{1}{g_{11}}\big(\Gamma^2_{12,1} - \Gamma^2_{11,2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}\big) = -\tfrac{1}{g_{11}}\big(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \partial_2\Gamma^2_{11}\big)\\
&= -\tfrac{1}{r^2\sin^2 v}\Big(\tfrac{\cos v}{\sin v}\big(-\sin v\cos v\big) + \cos^2 v - \sin^2 v\Big) = -\tfrac{1}{r^2\sin^2 v}\big(-\sin^2 v\big) = \tfrac{1}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos

Ejemplo 3: (Superficies de revolución)
Consideramos la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\big), \quad f(v) > 0.$$

Mostrar que

- $\Gamma_{11}^1 = 0$,
- $\Gamma_{11}^2 = -\dfrac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}$,
- $\Gamma_{12}^1 = \dfrac{f'}{f}$,
- $\Gamma_{12}^2 = 0$,
- $\Gamma_{22}^1 = 0$,
- $\Gamma_{22}^2 = \dfrac{f'f'' - g'g''}{(f')^2 + (g')^2}$.