

# **SUPERFICIES MÍNIMAS**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 20) 19.MARZO.2021

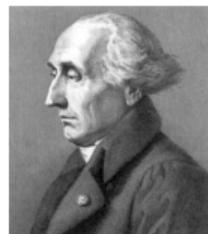
# Superficies mínimas

El problema de Plateau:

Formulado por LAGRANGE en 1760, luego renombrado en honor a JOSEPH PLATEAU, debido a su extensa investigación usando superficies de jabón.

Consiste en mostrar la existencia de ciertas superficies mínimas, dada una frontera específica.

Hoy en día, el problema se considera parte del cálculo de variaciones. El problema de existencia y regularidad forman parte de la teoría geométrica de la medida.



J.L. Lagrange



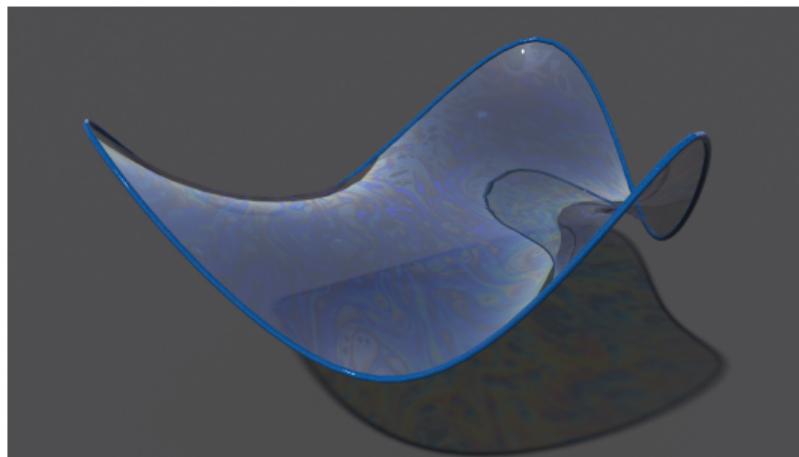
J. Plateau

# Superficies mínimas

El problema de Plateau:

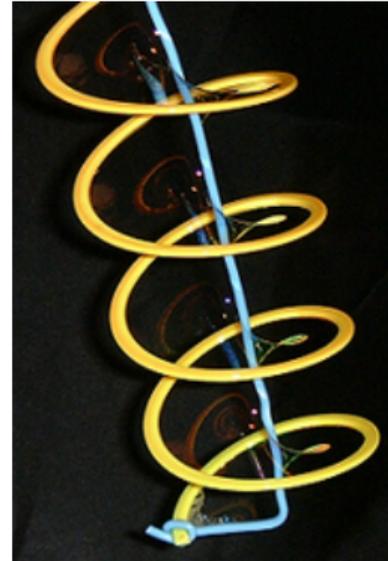
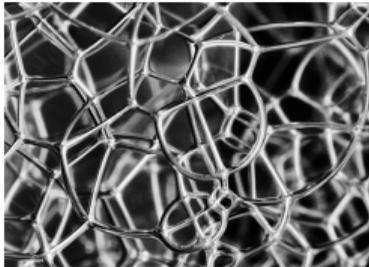
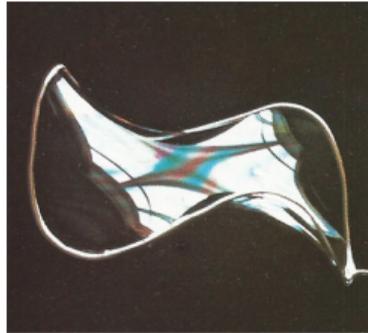
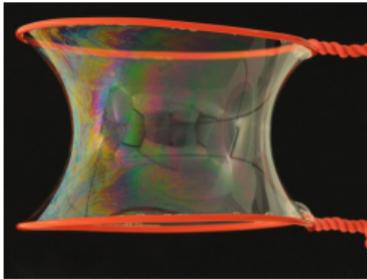
Dada una curva cerrada simple  $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ , queremos determinar de entre todas las superficies  $S \subset \mathbb{R}^3$ , con borde  $\partial S = \alpha$ , aquella que tiene menor área.

$\operatorname{argmin} A(S)$ , sujeto a  $\partial S = \alpha$ .



# Superficies mínimas

Relación con física: minimización de energía (tensión superficial). Leyes de PLATEAU.



# Superficies mínimas

## Definición

Sea  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  una parametrización de una superficie regular  $S$ . Una aplicación diferenciable  $\bar{\mathbf{x}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$  se llama una **variación** de  $\mathbf{x}$  si  $\bar{\mathbf{x}}(0, u, v) = \mathbf{x}(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in U$ .

## Definición

Dada una función diferenciable  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $S$  la superficie regular parametrizada por  $\mathbf{x}$ , definimos la **variación normal** de  $S$  por  $h$  como la aplicación  $\bar{\mathbf{x}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(t, u, v) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), (u, v) \in U,$$

donde  $N$  es el campo normal unitario a  $S$ .



# Superficies mínimas

**Obs.** Por diferenciabilidad y continuidad, para valores pequeños de  $t$ , tenemos que  $S$  regular  $\Rightarrow S + thN$  regular. Luego  $S_t = S + thN$  se parametriza por

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \bar{\mathbf{x}}(t, u, v), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

De ahí,  $\mathbf{x}_u^t = \mathbf{x}_u + th_u N + thN_u$ ,  $\mathbf{x}_v^t = \mathbf{x}_v + th_v N + thN_v$ . Luego,

$$E^t = \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_u^t \rangle = E + 2th \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + O(t^2) \approx E - 2the,$$

$$F^t = \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = E + th \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + th \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle + O(t^2) \approx F - 2thf,$$

$$G^t = \langle \mathbf{x}_v^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = G + 2th \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + O(t^2) \approx G - 2thg.$$

$$\text{Definimos } A(t) = A(S^t) = \iint_U \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, du \, dv = \iint_U \sqrt{\det(g_{ij}^t)} \, du \, dv.$$

# Superficies mínimas

Como  $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , para minimizar  $A$  hallamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial E^t}{\partial t}(0, u, v) = -2he, \quad \frac{\partial F^t}{\partial t}(0, u, v) = -2hf, \quad \frac{\partial G^t}{\partial t}(0, u, v) = -2hg.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t}(0) &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_U \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv \Big|_{t=0} = \iint_U \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \Big|_{t=0} du dv \\ &= \iint_U \frac{1}{2} (E^t G^t - (F^t)^2)^{-1/2} \left( \frac{\partial E^t}{\partial t}(0) G^t + \frac{\partial G^t}{\partial t}(0) E^t - 2 \frac{\partial F^t}{\partial t}(0) F^t \right) \Big|_{t=0} du dv \\ &= \iint_U \frac{1}{2} (EG - F^2)^{-1/2} (-2heG - 2hgE + 2(2hfF)) du dv \\ &= \iint_U \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) (-2h) \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= -2 \iint_U hH \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned}$$

# Superficies mínimas

Entonces,  $A'(0) = -2 \iint_U hH \sqrt{EG - F^2} du dv = -2 \iint_U hH dS.$

Hemos probado la siguiente

## Proposición

Sea  $A_h(t)$  el área de la superficie  $S^t$ , parametrizada por  $\mathbf{x}^t(u, v) = S + thN = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v)$ . Entonces

$$A'_h(0) = -2 \iint_U hH dS. \quad (1)$$

**Obs.** De alguna manera queremos encontrar la superficie de menor área, sin importar la forma en que hacemos la variación normal. Esto implica que queremos que las derivadas

$$A'_h(0) = 0, \quad \text{para toda función diferenciable } h : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

# Superficies mínimas

## Definición

Una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  se llama una **superficie mínima** si  $H \equiv 0$ .

Consecuencia de la ecuación (1), es posible mostrar que

## Propiedad

$S \subset \mathbb{R}^3$  es mínima  $\Leftrightarrow A'_h(0) = 0$ , para toda variación normal  $\mathbf{x}_h^t$  de  $S$ .

Prueba:

( $\Rightarrow$ ) Si  $S$  es mínima, entonces  $H \equiv 0$ , y

$$A'_h(0) = -2 \iint_U hH dS = -2 \iint_U 0 dS = 0, \quad \forall h.$$

( $\Leftarrow$ ) La única forma de anular  $A'_h(0) = 0, \forall h$ , es que el integrando se anule,  $\Rightarrow hH = 0, \forall h$ . Luego,  $H \equiv 0$ .

# Superficies mínimas

Recordemos que el gradiente de  $A$  se define como el único vector que satisface

$$\langle \nabla A(\mathbf{x}), h \rangle = D_h A(\mathbf{x}) = A'_h(\mathbf{o}),$$

donde el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  está definido sobre el espacio de funciones  $C^\infty(U)$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \iint_U \psi_1 \psi_2 \sqrt{\det(g_{ij})} du dv.$$

En particular,  $\nabla A(\mathbf{x}) = -2H$ , ya que

$$\langle -2H, h \rangle = -2 \iint_U hH dS = D_h A(\mathbf{x}) = A'_h(\mathbf{o}).$$

Esto muestra que: si  $\mathbf{x}$  no es superficie mínima, entonces la evolución  $\mathbf{x}^t = \mathbf{x} + t h H N = \mathbf{x} - \frac{t}{2} \nabla A(\mathbf{x}) N$  conduce a una superficie cuya área es estrictamente menor.

# Superficies isotérmicas

## Definición

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular. Decimos que una parametrización  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  es **isotérmica** si  $E = G$  y  $F = 0$  ( $|\mathbf{x}_u| = |\mathbf{x}_v|$ ,  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ ). En ese caso, los parámetros o coordenadas  $(u,v)$  se llaman isotérmicos.



Parametrización isotérmica de un elipsoide

# Superficies isotérmicas

## Definición

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular. Una parametrización  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  es **conforme**, si la primera forma fundamental es un múltiplo de la identidad

$$I|_{\mathbf{p}} = (g_{ij}) = \lambda(u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (u, v) \in U,$$

para alguna función  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dos superficies  $S, \tilde{S}$ , con parametrizaciones  $\mathbf{x} : U \rightarrow S, \tilde{\mathbf{x}} : U \rightarrow \tilde{S}$  son **conformemente equivalentes** si

$$\tilde{I}|_{\mathbf{p}} = (\tilde{g}_{ij}) = \lambda(u, v) (g_{ij}) = \lambda(u, v) I|_{\mathbf{p}}, \quad \text{for } (u, v) \in U,$$

para alguna función positiva  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Equivalentemente,  $S$  y  $S'$  son conformemente equivalentes si existe un cambio de parametrización  $\varphi = \tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\left\langle \frac{\partial(\tilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_i}, \frac{\partial(\tilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_j} \right\rangle = \lambda(u, v) \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right\rangle, \quad \forall i, j.$$

# Superficies isotérmicas

## Proposición

Las siguientes son equivalentes:

(1.)  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  es isotérmica.

(2.)  $\mathbf{x}$  es una aplicación conforme (preserva ángulos entre vectores  $T_p S$ ).

(3.) para todo  $\mathbf{q} \in U$ , existe  $\lambda(\mathbf{q}) > 0$  tal que

$$\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle = \lambda(\mathbf{q})^2 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

Prueba: (1  $\Rightarrow$  3). Sea  $\lambda(\mathbf{q}) = E = G$ . Por definición de la primera forma fundamental, tenemos  $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 \rangle = E = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$ .

Similarmente,  $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = G = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ , y

$\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = F = 0 = \lambda \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ . Así, la propiedad se verifica para la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , y por linealidad, se extiende a todo vector.

# Superficies isotérmicas

(3  $\Rightarrow$  2).

$$\begin{aligned}\cos \angle(D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2) &= \frac{\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle}{|D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1| \cdot |D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2|} = \frac{\lambda^2(\mathbf{q}) \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}{\lambda^2(\mathbf{q}) |\mathbf{w}_1| \cdot |\mathbf{w}_2|} \\ &= \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}{|\mathbf{w}_1| \cdot |\mathbf{w}_2|} = \cos \angle(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{x}$  es conforme.

(2  $\Rightarrow$  1).

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 \rangle = \lambda(\mathbf{q}) \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \lambda(\mathbf{q}) = \lambda(\mathbf{q}) \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = \lambda(\mathbf{q}) \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0. \quad \square\end{aligned}$$

# Superficies isotérmicas

## Teorema

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular. Dado  $\mathbf{p} \in V \cap S$ , siempre existe una parametrización isotérmica  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ .

(Idea: aplicar ortonormalización de Gram-Schmidt a la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .)

# Superficies isotérmicas

Si  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  es una parametrización isotérmica, entonces  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  y  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ .

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, & \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle, & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.\end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente propiedad.

# Superficies isotérmicas

## Propiedad

Si  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  es una parametrización isotérmica, entonces  $\Delta\mathbf{x}$  es paralelo al vector normal  $N$ .

### Prueba:

De las ecuaciones anteriores,  $\langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ . Esto muestra que  $\Delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}}S^\perp \Rightarrow \Delta\mathbf{x}$  es paralelo a  $N$ ,  $\forall \mathbf{p} \in S$ .  $\square$

### Obs.

De la propiedad anterior, existe una función diferenciable  $\beta : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Delta\mathbf{x} = \beta N$ . En particular, podemos escribir

$$\beta = \langle \beta N, N \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, N \rangle.$$

# Superficies isotérmicas

Luego,

$$\begin{aligned}\beta &= \langle \Delta \mathbf{x}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = e + g \\ &= II_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_u) + II_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_v).\end{aligned}$$

De ahí que

$$\frac{1}{\lambda^2} \beta = II_{\mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\lambda}\right) + II_{\mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{x}_v}{\lambda}\right) = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 2H.$$

Portanto,

$$\boxed{\beta = 2\lambda^2 H, \quad \Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 H N.}$$

## Propiedad

*Si  $\mathbf{x}$  es isotérmica, entonces  $\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 H N$ .*

# Superficies isotérmicas

Recordemos que una función  $f$  es **armónica** si  $\Delta f = 0$ .

## Corolario

$S \subset \mathbb{R}^3$  es superficie mínima  $\Leftrightarrow$  las funciones coordenadas  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  son funciones armónicas, cuando se consideran en parámetros isotérmicos  $(u, v)$ .

### Prueba:

$S$  es mínima  $\Leftrightarrow H \equiv 0 \Leftrightarrow \Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 H \mathbf{N} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x, y, z)$  es armónica  
 $\Leftrightarrow x, y, z$  son armónicas.  $\square$

- Conexiones con funciones holomorfas (próxima aula).

# Ejemplos de superficies mínimas

## Ejemplo 1: (Trivial)

El plano es una superficie mínima, pues  $H \equiv 0$ .

Otros ejemplos de superficies mínimas:

- catenoide
- helicoide
- superficie de Enneper
- superficie de Henneberg
- superficie de Costa
- superficie de Scherk I y II
- ...

# Ejemplos de superficies mínimas

Tema del primer seminario:

1. Catenoide y Helicoide + ¿cuál es la relación entre ambas?
2. Superficie de Enneper, Superficie de Riemman
3. Superficie de Henneberg, Trinoide (3-noide)
4. Superficie de Costa, Superficie de Bour
5. Superficies de Scherk I y II, *Saddle tower*

# Ejemplos de superficies mínimas

¿Qué hay que hacer?

Preparar una presentación del tema (25 minutos máximo).

1. breve historia
2. propiedades interesantes/importantes
3. parametrizaciones
4. mostrar por qué es superficie mínima
5. ...

Importante

- Medir bien el tiempo (seré riguroso en cuanto al tiempo).
- Enviar .pdf por correo al menos 2 días antes.