Superficies Regladas, Superficies de Revolución

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 19) 17.marzo.2021

Definición

*Una **familia diferenciable a 1-parámetro** de rectas $\{\alpha(t), \mathbf{w}(t)\}$ es una correspondencia que asocia a cada $t \in I$, un punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ y un vector $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{w}(t) \neq 0$, con $\alpha, \mathbf{w} : I \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables.*

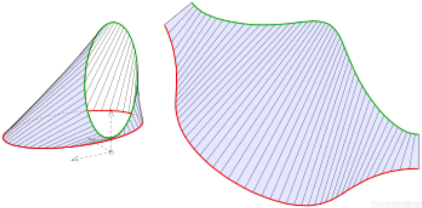
Definición

La superficie parametrizada

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t), \quad t \in I, v \in \mathbb{R},$$

*se llama la **superficie reglada** generada por $\{\alpha(t), \mathbf{w}(t)\}$.
Las rectas $\ell_t : \alpha(t) + v\mathbf{w}(t)$ se llaman las generatrices de la superficie, mientras que la cuva $\alpha(t)$ se llama la directriz.*

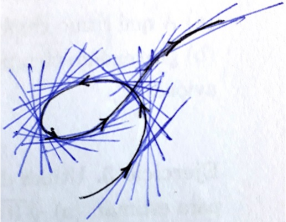
Superficies regladas



Ejemplo 1: (Superficies tangentes a curvas) Si α es curva regular, entonces

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t),$$

es una superficie reglada.



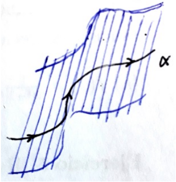
Superficie tangente

Superficies regladas

Ejemplo 2: (Cilindros) Si α es curva regular plana, con P el plano de la curva. Sea $\mathbf{w} \notin P$, constante. Entonces

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w},$$

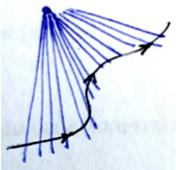
es una superficie reglada.



Cilindro

Ejemplo 3: (Conos) Si α es curva regular plana. P el plano de la curva. Si todas las generatrices $\alpha(t) + v\mathbf{w}(t)$ pasan por un punto fio $\mathbf{p} \notin P$ entonces

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t),$$



Cono

Ejemplo 4: (Catenoide)

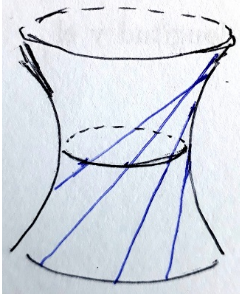
Sea S^1 el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, $\alpha(t)$ una parametrización de S^1 por longitud de arco. Para cada $sin(0, 2\pi)$, definamos $\mathbf{w}(s) = \alpha'(s) + \mathbf{e}_3$. Luego la superficie S dads por

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{w}(s) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + \mathbf{e}_3),$$

es reglada.

De hecho, si $\alpha(s) = (\frac{1}{\omega}\cos\omega s, \frac{1}{\omega}\sin\omega s)$, entonces

$$\mathbf{x}(s, v) = \left(\tfrac{1}{\omega}\cos\omega s - v\sin\omega s, \tfrac{1}{\omega}\sin\omega s + v\cos\omega s, v\right).$$



Catenoide

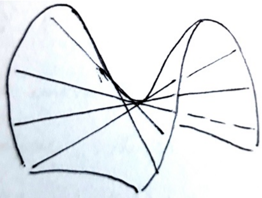
Ejemplo 5: (Paraboloide hiperbólico)

Sea S la superficie dada por $z = kxy$, $k \neq 0$.
Observe que las rectas $x = t$, $y = \frac{z}{kt}$, para $t \neq 0$, pertenecen a S. La intersección de esta familia de rectas con el plano $z = 0$ produce la curva

$$\alpha(t) = (t, 0, 0).$$

Tomando esta curva como directriz, y los vectores $\mathbf{w}(t)$ paralelos a las rectas $x = t$, $y = \frac{z}{kt}$, obtenemos que $\mathbf{w}(t) = (0, 1, kt)$.
Esto produce la superficie reglada

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t) = (t, v, ktv).$$



Paraboloide hiperbólico

Superficies regladas

Comenzamos ahora a estudiar las superficies regladas. Sin pérdida, podemos suponer que $|\mathbf{w}(t)| = 1$. Haremos el supuesto adicional de que $\mathbf{w}'(t) \neq 0$. En ese caso, diremos que la superficie es **no cilíndrica**.

Salvo mención de lo contrario, en lo siguiente asumimos que toda superficie reglada $\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t)$ será no cilíndrica, con $|\mathbf{w}(t)| = 1$, $\forall t$. En particular, esto implica que $\langle \mathbf{w}(t), \mathbf{w}'(t) \rangle = 0$, $\forall t$.

Queremos encontrar una curva parametrizada $\beta(t)$, tal que

$$\langle \beta'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle = 0,$$

para todo t, y que el trazo de β está contenido en la parametrización $\mathbf{x}$.

Esto es

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)\mathbf{w}(t),$$

con $u(t)$ una función diferenciable de valores reales $u : I \to \mathbb{R}$.

Suponiendo la existencia de una tal curva β, obtenemos

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + u'(t)\mathbf{w}(t) + u(t)\mathbf{w}'(t).$$

Como $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = 0$, entonces

$$0 = \langle \beta'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle + u(t)\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle.$$

De ahí que $u(t) = -\dfrac{\langle \alpha'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle}{\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle} = -\dfrac{\langle \alpha'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle}{||\mathbf{w}'(t)||^2}$.

Mostramos ahora que la curva β no depende de la directriz $\alpha(t)$. Sea $\widetilde{\alpha}(t)$ otra directriz de la superficie:

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t) = \widetilde{\alpha}(t) + s\mathbf{w}(t),$$

para alguna función $s = s(v)$.
Luego, si $\widetilde{\beta}' = \widetilde{\alpha}' + s'\mathbf{w} + s\mathbf{w}'$, entonces

$$0 = \langle \widetilde{\beta}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle = \langle \widetilde{\alpha}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle + s(t)\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \; s(v) = -\frac{\langle \widetilde{\alpha}'(t), \mathbf{w}'(t) \rangle}{||\mathbf{w}'(t)||^2}.$$

De ahí,

$$\beta - \widetilde{\beta} = (\alpha + u\mathbf{w}) - (\widetilde{\alpha} + s\mathbf{w}) = (\alpha - \widetilde{\alpha}) + (u - s)\mathbf{w} = \alpha - \widetilde{\alpha} - \frac{\langle \alpha' - \widetilde{\alpha}', \mathbf{w}' \rangle}{||\mathbf{w}'||^2}\mathbf{w}.$$

Como $\alpha - \widetilde{\alpha} = (s - v)\mathbf{w}$, entonces $\alpha' - \widetilde{\alpha}' = (s - v)\mathbf{w}' + (s' - v')\mathbf{w}$ y

$$\begin{aligned}
\beta - \widetilde{\beta} &= \alpha - \widetilde{\alpha} - \frac{\langle \alpha - \widetilde{\alpha}, \mathbf{w}' \rangle}{||\mathbf{w}'||^2} = (s - v)\mathbf{w} - \frac{\langle (s - v)\mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle}{||\mathbf{w}'||^2}\mathbf{w} \\
&= (s - v)\mathbf{w} - (s - v)\mathbf{w} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

de modo que $\beta = \widetilde{\beta}$.

Definición

*$\beta(t)$ se llama la **línea de estricción** de S. Los puntos de β se llaman los **puntos centrales** de la superficie reglada.*

Superficies regladas

Tomamos la línea de estricción como directriz. Entonces

$$\mathbf{x}(t,u) = \beta(t) + u\mathbf{w}(t).$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_t = \beta' + u\mathbf{w}', \;\; \mathbf{x}_u = \mathbf{w}, \;\;\; \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u = (\beta' + u\mathbf{w}') \times \mathbf{w} = \beta' \times \mathbf{w} + u(\mathbf{w}' \times \mathbf{w}).$$

Como $\langle \beta', \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = 0$, entonces $\{\beta', \mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$ forman una base ortogonal. Luego, $\beta' \times \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}'$. Así

$$|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u|^2 = |\lambda \mathbf{w}' + u(\mathbf{w}' \times \mathbf{w})| = \lambda^2 |\mathbf{w}'|^2 + u^2 |\mathbf{w}'|^2 = (\lambda^2 + u^2)|\mathbf{w}'|^2.$$

De ahí que los puntos singulares de S se sitúan a lo largo del la línea de estricción ($u = 0$), y ocurren sólo cuando $\lambda(t) = 0$. Además,

$$\lambda = \frac{\det(\beta', \mathbf{w}, \mathbf{w}')}{|\mathbf{w}'|^2}, \qquad N = \frac{\lambda \mathbf{w}' + u(\mathbf{w}' \times \mathbf{w})}{(\lambda^2 + u^2)^{1/2}|\mathbf{w}'|}. \tag{1}$$

Calculamos la curvatura gaussiana: Como

$$\mathbf{x}_{tt} = \beta'' + u\mathbf{w}'', \quad \mathbf{x}_{tu} = \mathbf{w}', \quad \mathbf{x}_{uu} = 0,$$

entonces

$$f = \langle N, \mathbf{x}_{tu} \rangle = \frac{\langle \lambda \mathbf{w}' + u(\mathbf{w}' \times ww), \mathbf{w}' \rangle}{(\lambda^2 + u^2)^{1/2} |\mathbf{w}'|} = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + u^2)^{1/2}} |\mathbf{w}'|, \quad g = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0.$$

$$E = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle = (\lambda^2 + u^2)|\mathbf{w}'|, \quad F = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = |\mathbf{w}'|^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \; K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{E} = -\frac{\lambda^2 |\mathbf{w}'|^2}{(\lambda^2 + u^2)^2 |\mathbf{w}'|^2} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} \leq 0.$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Observaciones:

- En una superficie reglada, $K \leq 0$.
- $K = 0$ sólo a lo largo de aquellas generatrices que intersectan β en un punto singular ($\lambda(t) = 0$).

Ejemplo:

En el paraboloide hiperbólico $z = kxy$, $k \neq 0$, vimos que

$$\alpha(t) = (t, 0, 0), \quad \mathbf{w}(t) = (0, 1, kt).$$

Como $\alpha'(0) = (1, 0, 0) \perp \mathbf{w}(t), \mathbf{w}'(t)$, entonces α ya es la línea de estricción de S. El parámetro de distribución es

$$\lambda(t) = \frac{\det(\alpha', \mathbf{w}, \mathbf{w}')}{|\mathbf{w}'|} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & kt \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \frac{1}{k^2} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

De entre las superficier regladas, las superficies desenvolvíbles juegan un papel destacado.

Definición

Sea $\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\mathbf{w}(t)$ *la parametrización de una superficie reglada* S*, generada por la familia a 1-parámetro* $\{\alpha(t), \mathbf{w}(t)\}$*, con* $|\mathbf{w}(t)| = 1$*.*
S es llamada ***superficie desenvolvíble*** *(developable surface) si* $\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha') = 0$*,* $\forall t$*.*

La interpretación geométrica de una superficies desenvolvíble se puede obtener de la siguiente forma. Haciendo un cálculo análogo al desarrolado en (1), obtenemos

Superficies desenvolvíbles

$$f = \frac{\det(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \alpha')}{|N|}, \quad g = 0.$$

De la condición de S ser desenvolvíble, entonces $f \equiv 0$, de modo que $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = 0$. Esto implica que, en puntos regulares, la curvatura gaussiana de una superficie desenvolvíble es nula.

Podemos distinguir dos casos (no exhaustivos) de superficies desenvolvíbles:

- $\mathbf{w}(t) \times \mathbf{w}'(t) = 0$, $\forall t$. Esto implica que $\mathbf{w}'(t) \equiv 0$, y portanto $\mathbf{w}$ es constante. Luego, S es un cilindro, sobre una curva obtenida por la intersección del cilindro con un plano P.

- $\mathbf{w}(t) \times \mathbf{w}'(t) \neq 0$, $\forall t$. En este caso, $\mathbf{w}'(t) \neq 0$, $\forall t$, y la superficie S es no cilíndrica.
  Aplicando la teoría desarrollada antes, podemos determinar la línea de estricción y el parámetro de distribución

  $$\lambda = \det(\beta', \mathbf{w}, \mathbf{w}')|\mathbf{w}'|^2 \equiv 0.$$

  . Luego, β es el lugar geométrico de los puntos singulares de S.

  (1) Si $\beta'(t) \neq 0$, $\forall t$, se sigue de $\langle \beta', \mathbf{w}' \rangle \equiv 0$, que β' es paralelo a $\mathbf{w}$. Portanto, S es la superficie tangente de β.

  (2) Si $\beta'(t) = 0$, $\forall t$, entonces β es constante y la línea de estricción es un punto $\mathbf{p}$. Así, S es un cono con vértice en $\mathbf{p}$.

Superficies de revolución

Consideramos una superficie de revolución, parametrizada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big), \quad u \in (0, 2\pi),\ v \in (a,b),\ \varphi > 0.$$

Los coeficiente de la primera forma fundamental son

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Conviene suponer que la curva generatriz está parametrizada por longitud de arco. Así, $G = (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$.

El cálculo de los coeficientes de la segunda forma fundamental produce

$$e = -\varphi\psi', \quad f = 0, \quad g = \varphi''\psi' - \varphi'\psi''.$$

Superficies de revolución

Como $F = f = 0$, concluimos que los paralelos y los meridianos de una superficie de revolución son líneas de curvatura. En particular,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{-\varphi\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi^2} = -\frac{\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi}.$$

Como $\varphi > 0$, entonces los puntos parabólicos de S están dados por:

- $\psi' = 0$ (la recta tangente a la curva generatriz ψ' es perpendicular al eje de revolución); ó
- $\varphi''\psi' - \varphi'\psi'' = 0$ (la curvatura de la curva generatriz es cero).

Un punto que satisface las dos condiciones anteriores es un punto planar de S, y corresponde a aquellos lugares donde $e = f = g = 0$.

Superficies de revolución

Conviene una expresión alternativa para la curvatura de Gauss. Como $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$, derivando obtenemos

$$2\varphi''\varphi' + 2\psi''\psi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi''\varphi' = -\psi''\psi'.$$

Así,

$$K = -\frac{\psi'(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' - (\psi''\psi')\varphi'}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Para calcular las curvaturas principales, observe que

Propiedad

Las curvaturas principales de una superficie regular S tal que $F = f = 0$, están dadas por $\frac{e}{E}$ y $\frac{g}{G}$.

Prueba:
Observe que la curvatura media y la curvatura gaussiana están dadas por

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG}, \quad K = \frac{eg}{EG}.$$

Luego, recordemos que las curvaturas principales son las raíces del polinomio característico de DN:

$$x^2 - 2Hx + K = x^2 - \tfrac{eG+gE}{EG} + \tfrac{eg}{EG} = \left(x - \tfrac{e}{E}\right)\left(x - \tfrac{g}{G}\right),$$

de donde resultan $\kappa_1 = \frac{e}{E}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G}$. $\square$

De ahí que, para superficies de revolución

$$\kappa_1 = \frac{e}{E} = \frac{-\psi'\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}, \quad \kappa_2 = \frac{g}{G} = \frac{\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''}{1} = \psi'\varphi'' - \varphi'\psi''.$$

Gráficas de funciones

Sea S la superficie obtenida por la gráfica de la función clase C^2, $h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, esto es $z = h(x, y)$. Parametrizamos S por

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(u, v, h(u, v)\big), \quad (u, v) \in U.$$

Un cálculo simple muestra que

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, h_u), \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, h_v), \quad N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} = -\frac{\nabla h}{|\nabla h|}.$$

Luego,

$$E = 1 + (h_u)^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + (h_v)^2,$$

y

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 + (h_u)^2 & h_u h_v \\ h_u h_v & 1 + (h_v)^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Gráficas de funciones

Además,

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, h_{uu}), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, h_{uv}), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, h_{vv}),$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}},$$

y entonces

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \frac{1}{|\nabla h|} \begin{pmatrix} h_{uu} & h_{uv} \\ h_{uv} & h_{vv} \end{pmatrix} \mathbf{v} = \frac{1}{|\nabla h|} \mathbf{v}^T D^2 h(\mathbf{p}) \mathbf{v}.$$

Así, la segunda forma fundamental es básicamente la Hessiana de h.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \det DN = \frac{\det D^2h(\mathbf{p})}{|\nabla h|^2},\\
H &= \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} DN = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tr} D^2h(\mathbf{p})}{|\nabla h|}.
\end{aligned}
$$

Consideramos el desarrollo de Taylor de $h(u,v)$ en torno de $\mathbf{p}$. Para ello, vamos a suponer que los ejes principales coinciden con los ejes canónicos $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$. Entonces $h_x(0,0) = h_v(0,0) = 0$, $E = G = 1$, $F = 0$, $f = h_{uv} = 0$. En particular $\kappa_1 = \frac{e}{E} = e = h_{uu}$, $\kappa_2 = \frac{g}{G} = g = h_{vv}$ y

$$
\begin{aligned}
h(u,v) &= h(0,0) + \tfrac{1}{2}\big(h_{uu}(0,0)u^2 + 2h_{uv}(0,0)uv + h_{vv}(0,0)v^2\big) + R_2\\
&\approx \tfrac{1}{2}\big(\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2\big).
\end{aligned}
$$