

## **CURVATURAS EN SUPERFICIES**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 17) 10.MARZO.2021

# Curvaturas en superficies

En el aula anterior introdujimos la aplicación normal de Gauss

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con } \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}),$$

y la segunda forma fundamental

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Vimos que la segunda forma fundamental, de alguna manera codifica la información de la curvatura de la superficie  $S$  en el punto  $\mathbf{p}$ :

Existe una base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $T_{\mathbf{p}}S$ , en donde la segunda forma fundamental se escribe como

$$II_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$$

donde  $\kappa_1, \kappa_2$  y  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  son las curvaturas y direcciones principales en  $\mathbf{p}$ .

# Curvaturas en superficies

En particular, recordemos que toda forma cuadrática (o más bien, toda aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) tiene dos invariantes importantes: su determinante y su traza.

## Definición

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie regular,  $\mathbf{p} \in S$ . Sean  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  las curvaturas principales de  $S$  en  $\mathbf{p}$ .

Definimos la **curvatura media** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  como

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} DN(\mathbf{p}).$$

Definimos la **curvatura de Gauss** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  como

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det DN(\mathbf{p}).$$

# Curvaturas en superficies

## Obs!

- Las curvaturas  $H$  y  $K$  determinan completamente la información de la curvatura.

Esto es porque la traza y el determinante determinan automáticamente los autovalores de una matriz  $2 \times 2$ : los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  satisfacen

$$2H = \operatorname{tr} T = \lambda_1 + \lambda_2, \quad K = \det T = \lambda_1 \lambda_2.$$

En este caso, las curvaturas principales  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las raíces del polinomio

$$x^2 - (\operatorname{tr} DN(\mathbf{p}))x + \det DN(\mathbf{p}) = x^2 - 2Hx + K = 0.$$

## Definición

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Un punto  $\mathbf{p} \in S$  se llama

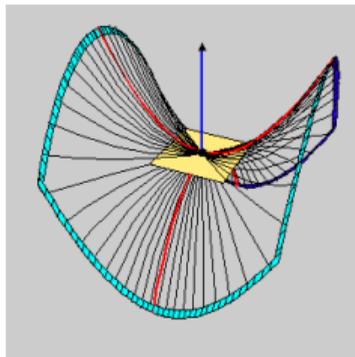
- **elíptico**, si  $K(\mathbf{p}) > 0$ ;
- **hiperbólico**, si  $K(\mathbf{p}) < 0$ ;
- **parabólico**, si  $K(\mathbf{p}) = 0$ , pero  $DN(\mathbf{p}) \neq 0$ ;
- **planar**, si  $DN(\mathbf{p}) = 0$ .

## Definición

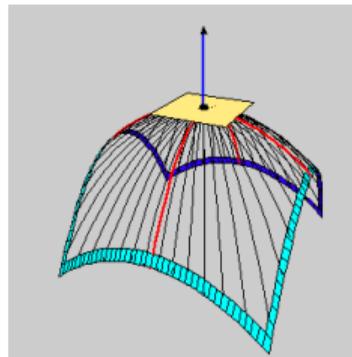
Un punto  $\mathbf{p} \in S$  tal que  $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p})$  se llama un **punto umbílico**.

**Obs!:** Si todos los puntos de una superficie  $S$  son umbílicos, entonces  $S$  está contenida en un plano o una esfera.

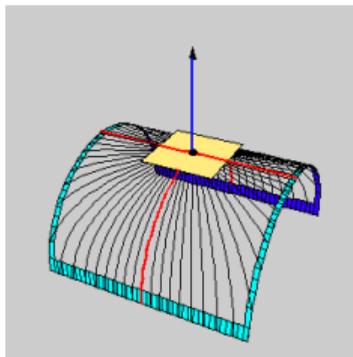
# Curvaturas



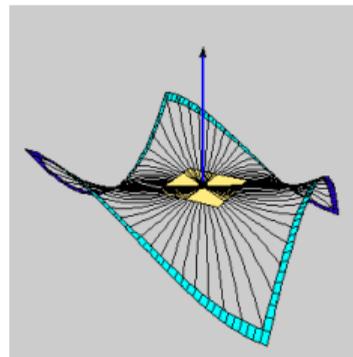
hiperbólico



elíptico



parabólico



planar

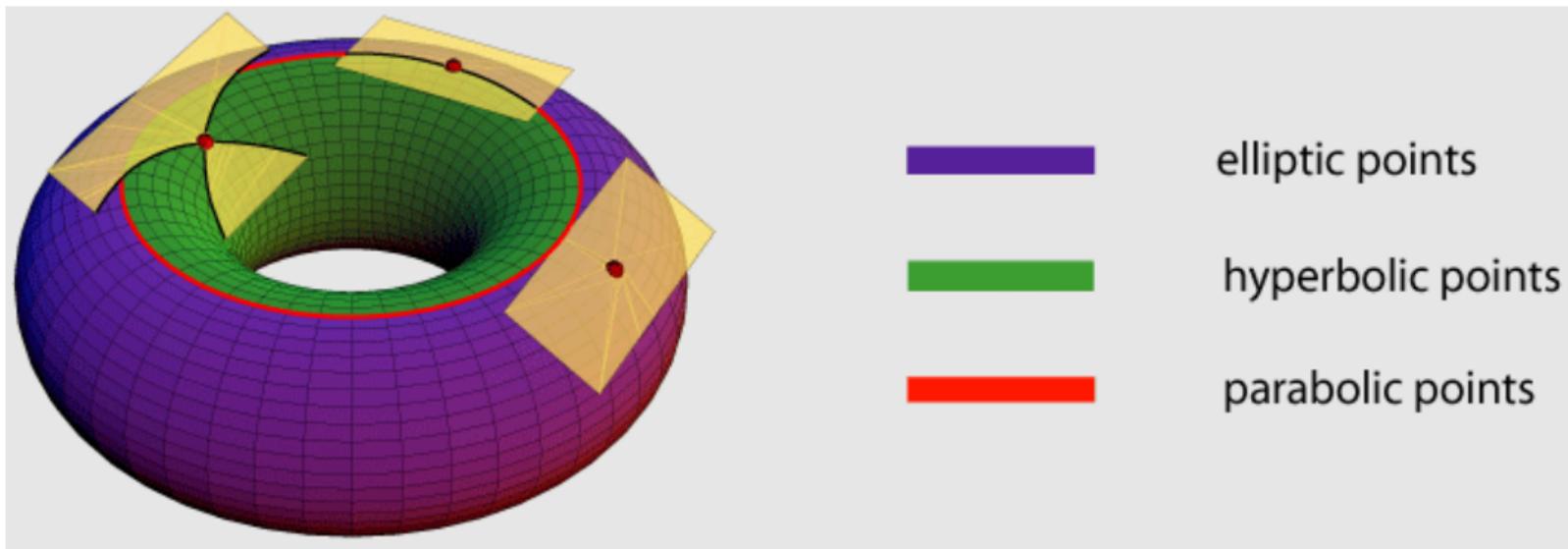
## Ejemplos:

- Todo punto de una esfera es elíptico.
- El origen de la superficie  $x^2 - y^2 = z$  es hiperbólico.
- Todo punto del cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  es parabólico.
- en la superficie  $z = x^4 + y^4$ , el origen es planar.

## Ejercicio para pensar:

¿En el toro, cuáles puntos son elípticos? ¿Cuáles son hiperbólicos? ¿Hay puntos parabólicos? ¿Y planares?

# Curvaturas



Clasificación de la curvatura en puntos del toro  $\mathbb{T}^2$ .

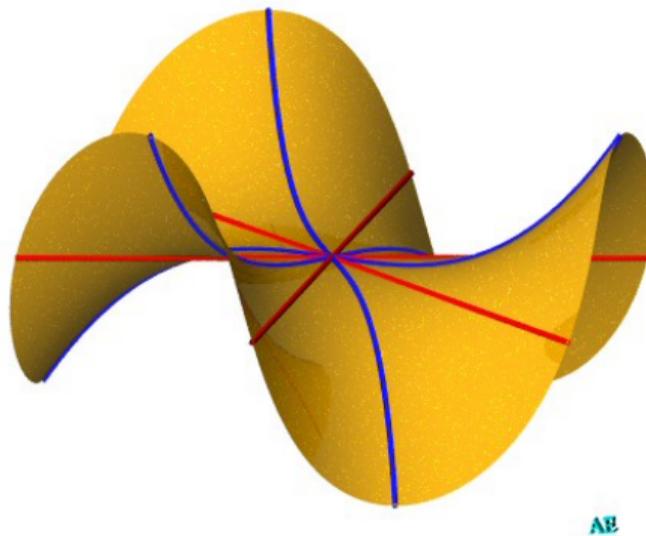
## Definición

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie regular,  $\mathbf{p} \in S$ . Una **dirección asintótica** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  es una dirección  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  para la cual la curvatura normal  $\kappa(\mathbf{v}) = 0$ .

Una **curva asintótica** de  $S$  es una curva regular conexa  $\alpha(t) \subseteq S$ , tal que para cada punto  $\mathbf{p} = \alpha(t)$ , el vector tangente  $\alpha'(t)$  es una dirección asintótica.

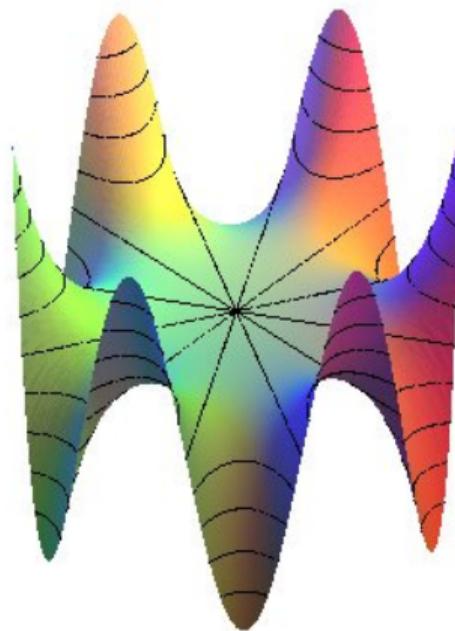
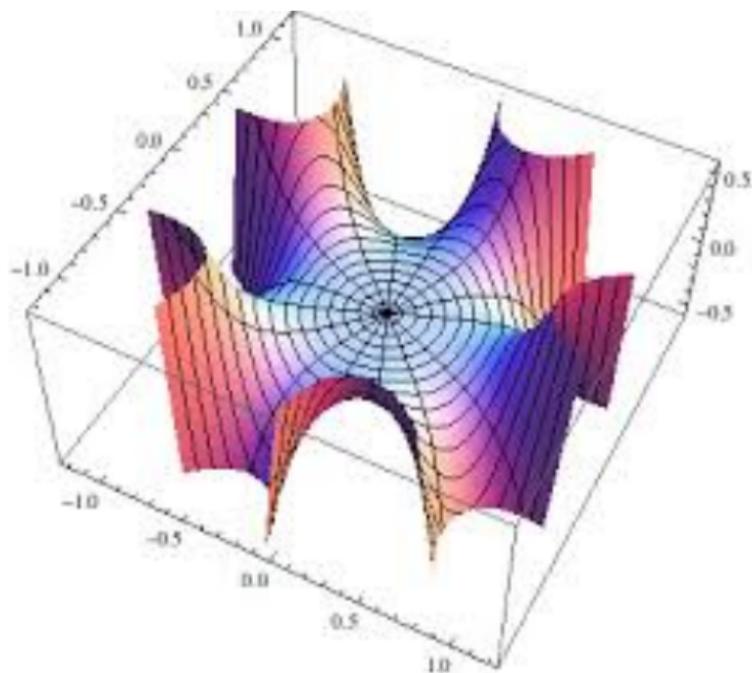
## Definición

Una **curva principal** de  $S$  es una curva regular conexa  $\alpha(t) \subseteq S$ , tal que para cada punto  $\mathbf{p} = \alpha(t)$ , el vector tangente  $\alpha'(t)$  es una dirección principal.



Direcciones asintóticas en un punto hiperbólico de  $S$ .

# Curvaturas



Otros ejemplos de direcciones asintóticas y puntos parabólicos.

# La indicatriz de Dupin

## Definición

Sea  $\mathbf{p} \in S$ . La **indicatriz de Dupin** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  es el conjunto de vectores  $\mathbf{v}$  en  $T_{\mathbf{p}}S$  tales que  $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \pm 1$ .

Tomemos  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$   $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ , y sea  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ . Entonces,  $\mathbf{w} = \rho\mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{v} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ .

Luego, la fórmula de Euler nos da

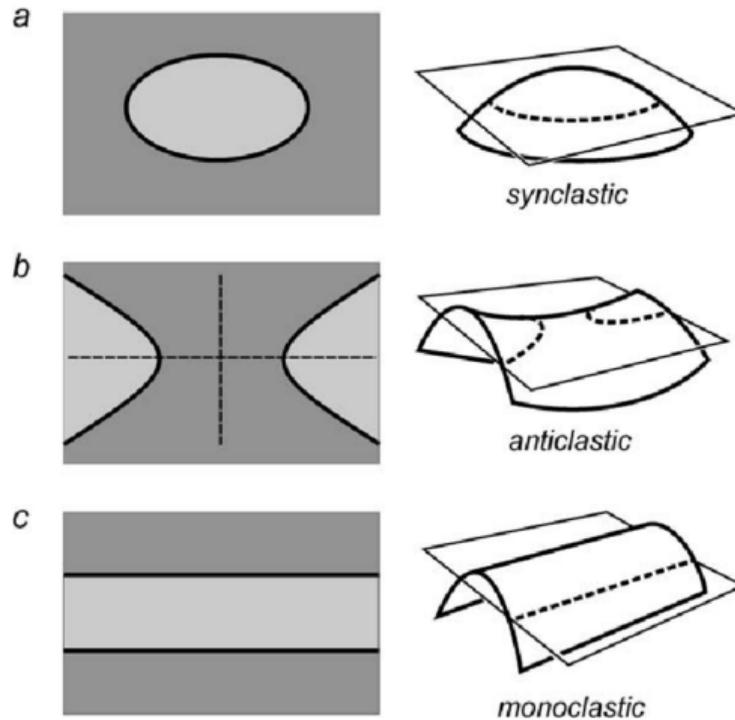
$$\pm 1 = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \rho^2 II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_1 \rho^2 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \rho^2 \sin^2 \varphi = \kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \zeta^2,$$

donde  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\zeta = \rho \sin \varphi$  y  $\mathbf{w} = \xi \mathbf{e}_1 + \zeta \mathbf{e}_2$ .

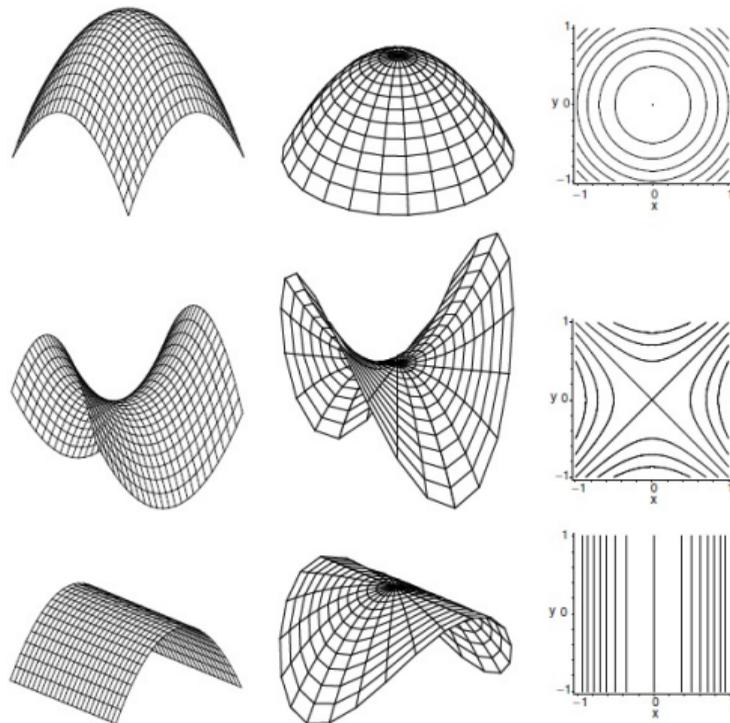
En el sistema coordenado  $(\xi, \zeta)$  la indicatriz de Dupin se resume a

$$\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \zeta^2 = \pm 1.$$

# La indicatriz de Dupin



# La indicatriz de Dupin



# La indicatriz de Dupin

Importante!

Sabemos que localmente, toda superficie regular se comporta como la gráfica de alguna función  $z = f(x, y) = g(\xi, \zeta)$ .

En las coordenadas  $(\xi, \zeta)$ , la indicatriz de Dupin nos da el comportamiento local de esta superficie, en una vecindad del punto  $\mathbf{p} \in S$  como origen.

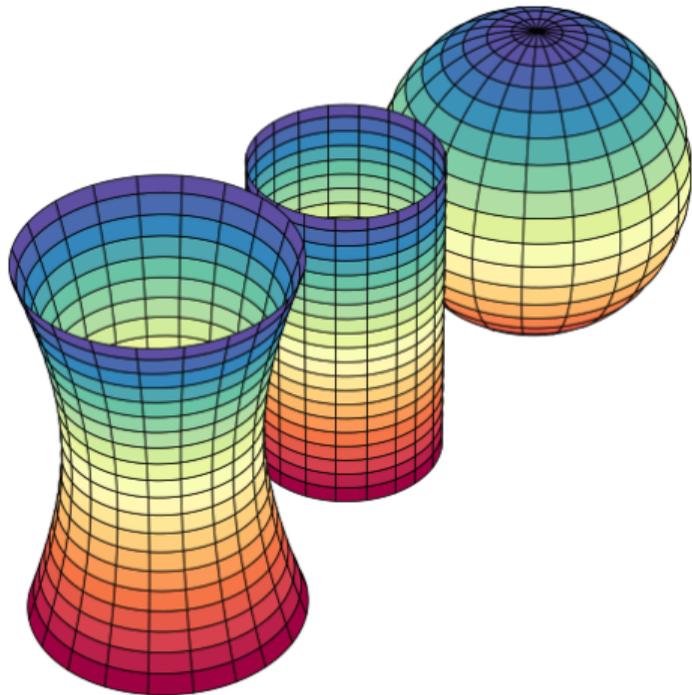
De aquí la idea de una tríada de comportamientos: elíptico, parabólico o hiperbólico.

Pregunta: ¿Pueden dar ejemplos de superficies con curvatura gaussiana

$K > 0$ ,  $K = 0$ ,  $K < 0$ ?

¿Y de curvatura media  $H > 0$ ,  $H = 0$ ,  $H < 0$ ?

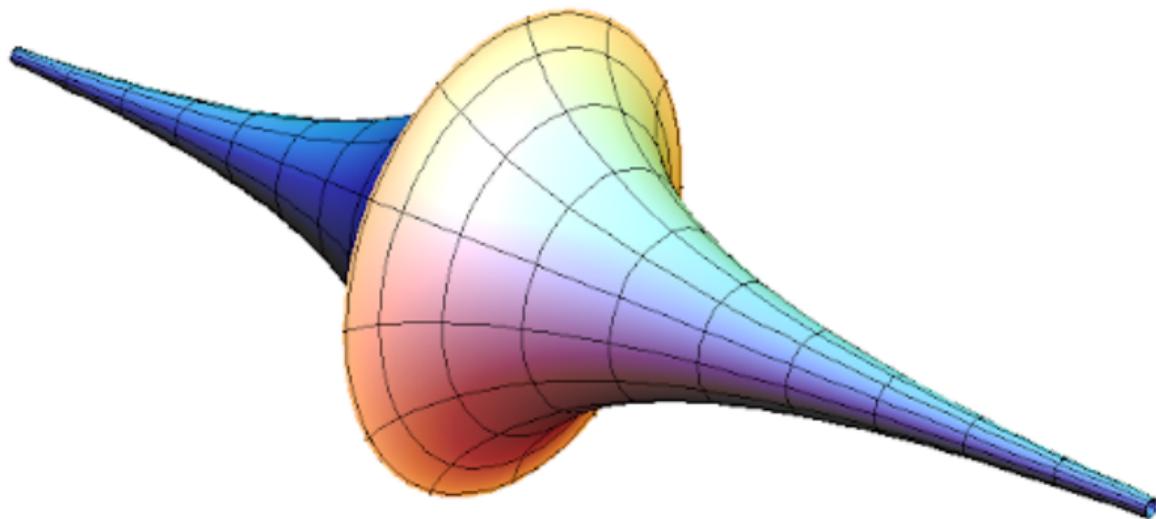
# Superficies de curvatura constante



Algunas superficies con curvatura gaussiana: (a)  $K < 0$ , (b)  $K = 0$ , (c)  $K > 0$ .

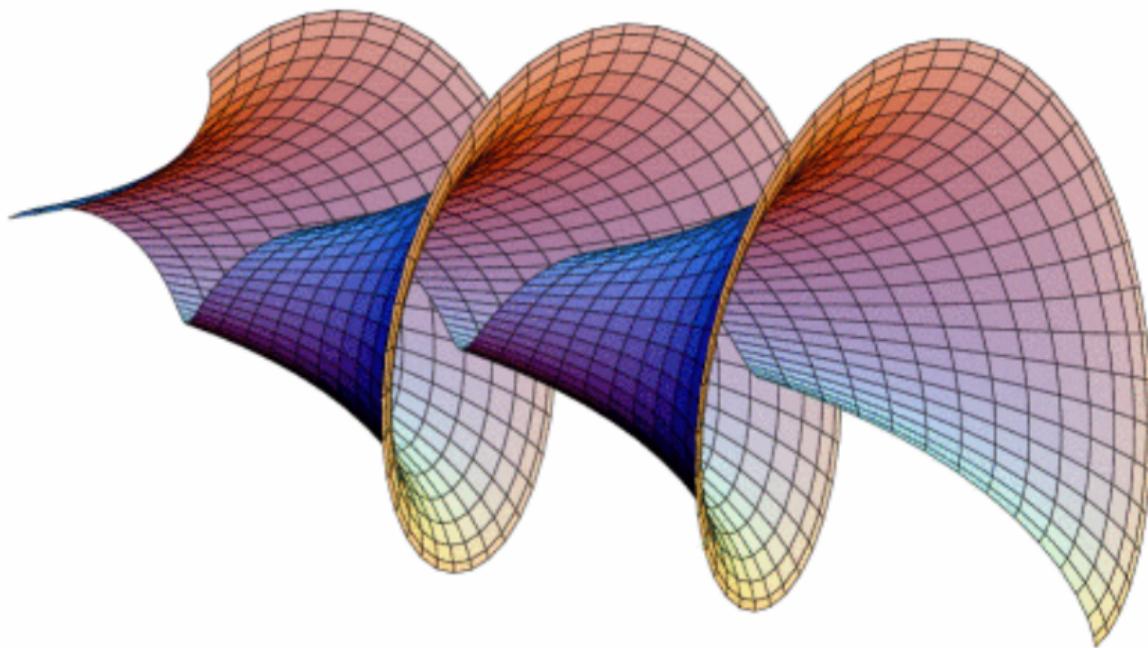
# Superficies de curvatura constante

Pregunta: ¿Existen superficies de curvatura gaussiana  $K$  constante? ¿Y de curvatura media  $H$  constante?



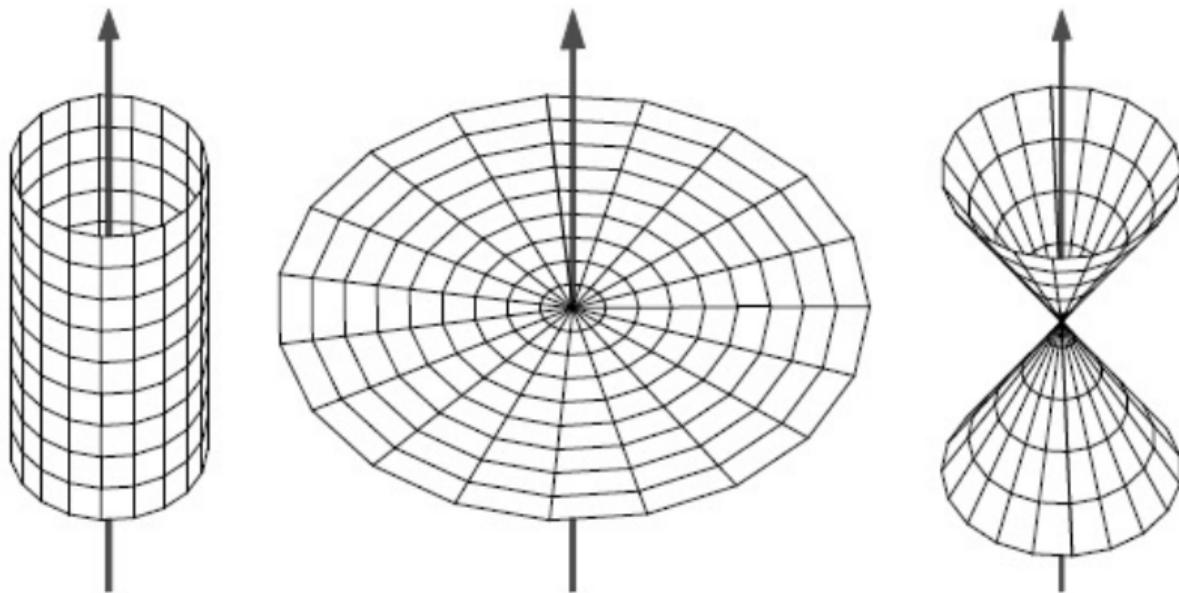
La pseudo-esfera (o tractroide) tiene curvatura constante  $K = -1$ .

# Superficies de curvatura constante



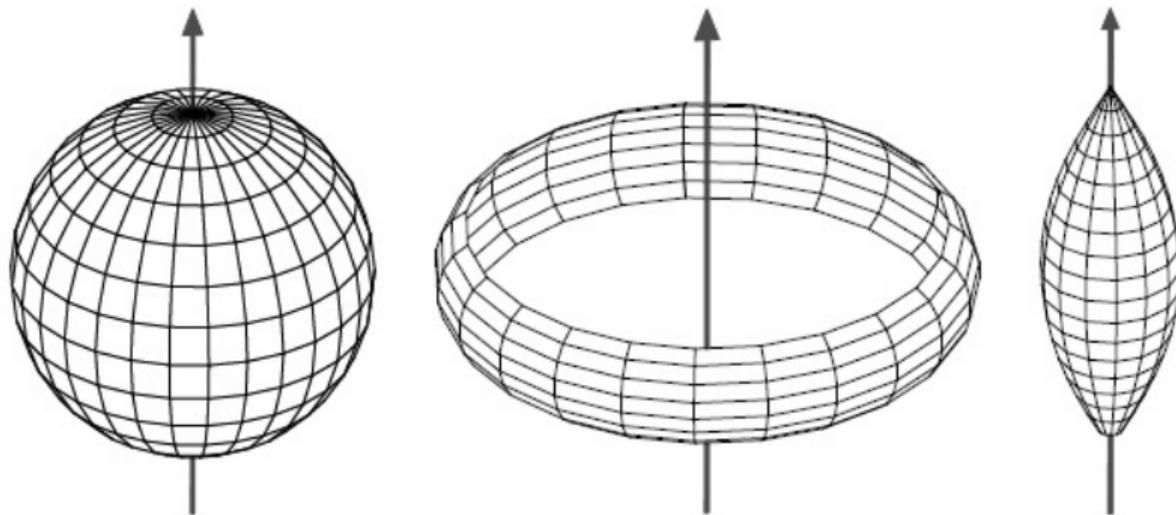
Una superficie de curvatura media constante  $H < 0$ .

# Superficies de curvatura constante



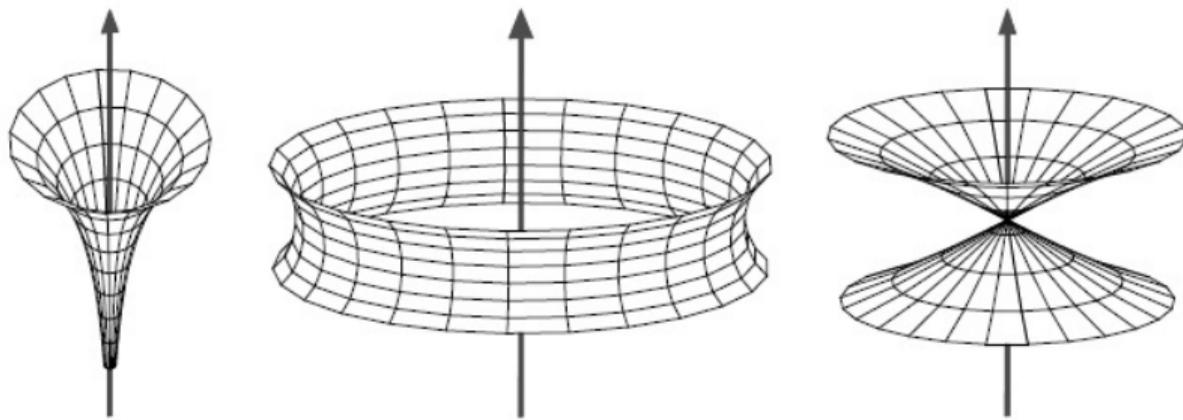
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana  $K = 0$ .

# Superficies de curvatura constante



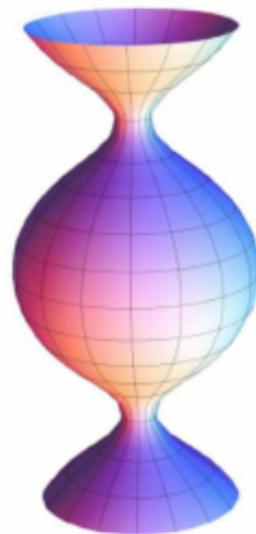
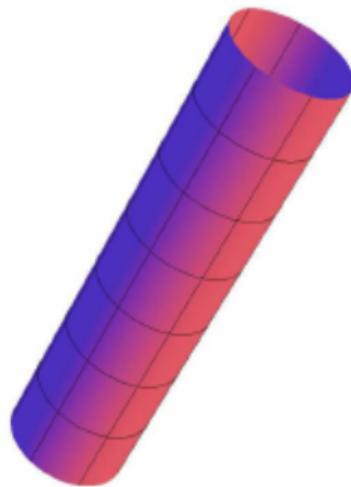
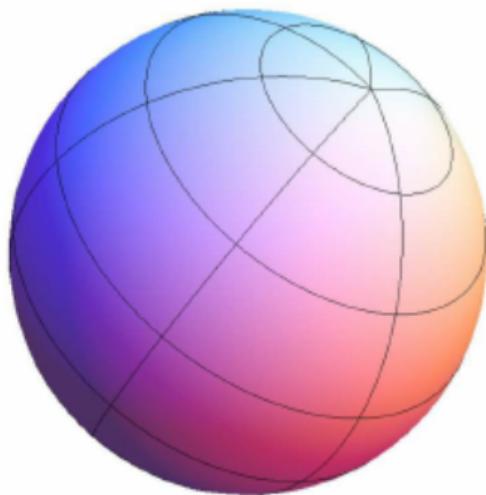
Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana  $K > 0$ .

# Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura gaussiana  $K < 0$ .

# Superficies de curvatura constante



Ejemplos de superficies con curvatura media constante  $H$ : (a) la esfera, (b) el cilindro, (c) el unduloide.

## Definición

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular orientable, y  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  una parametrización, con mapa de Gauss  $N(\mathbf{p}) : U \rightarrow S^2$ .

- i) Para cada  $\mathbf{p} \in U$ ,  $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$  es un isomorfismo lineal. El mapa  $L = -DN$  se llama el **mapa de Weingarten** u **operador de forma** de  $\mathbf{x}$ .
- ii)  $L$  es independiente de la parametrización  $\mathbf{x}$  (a menos de cambio de orientación del campo normal unitario  $N$ ), y es un operador autoadjunto con respecto a la primera forma fundamental  $I_{\mathbf{p}}$ .

# Coordenadas locales

Prueba:

(i) Se sigue simplemente de la relación  $0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle N, N \rangle = 2 \langle \frac{\partial}{\partial u_i} N, N \rangle$ . Por tanto, ambos vectores  $N_u, N_v$  son ortogonales a  $N$ . Que el mapa  $DN(\mathbf{p})$  es un isomorfismo lineal se sigue del hecho que  $D\mathbf{x}$  tiene rango máximo. Para mostrar (ii), sea  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \varphi$ , de modo que la normal correspondiente es  $\tilde{N} = \pm N \circ \varphi$  y

$$\tilde{L} = -D\tilde{N} \circ D\tilde{\mathbf{x}}^{-1} = (\pm DN \circ D\varphi) \circ (D\varphi^{-1} \circ D\mathbf{x}^{-1}) = \pm DN \circ D\mathbf{x}^{-1} = \pm L.$$

La propiedad de que  $L$  es autoadjunta se ve más fácilmente en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , donde tenemos que  $L\mathbf{x}_u = -N_u$  y  $L\mathbf{x}_v = -N_v$ :

$$\langle L\mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle = -\langle N_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle = -\frac{\partial}{\partial u_i} \langle N, \mathbf{x}_{u_j} \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{u_i u_j} \rangle.$$

Esta última expresión es simétrica en  $i$  y  $j$ .

# Coordenadas locales

## Definición

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular orientable, y  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  parametrización. Sea  $N$  el campo normal a  $\mathbf{x}$  y  $L$  el mapa de Weingarten. La **tercera forma fundamental** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  se define como

$$III_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = I_{\mathbf{p}}(DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}) = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle D^2N(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}.$$

- $II_{\mathbf{p}}$  y  $III_{\mathbf{p}}$  son formas bilineales en  $T_{\mathbf{p}}S$ ,  $\forall \mathbf{p} \in S$ .

## Proposición

Vale la siguiente relación entre las primeras tres formas fundamentales  $I_{\mathbf{p}}$ ,  $II_{\mathbf{p}}$ ,  $III_{\mathbf{p}}$ :

$$III_{\mathbf{p}} - \text{tr}(L) II_{\mathbf{p}} + \det(L) I_{\mathbf{p}} = 0. \quad \square$$