La Primera Forma Fundamental

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 14) 26.febrero.2021

Primera forma fundamental

Hasta ahora, hemos tratados a las superficies en $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Vamos ahora a introducir otras estructuras geométricas asociadas a una superficie S.

El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ natural de $S \subseteq \mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ de una superficie regular un producto interno, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$ dado por

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}S.$$

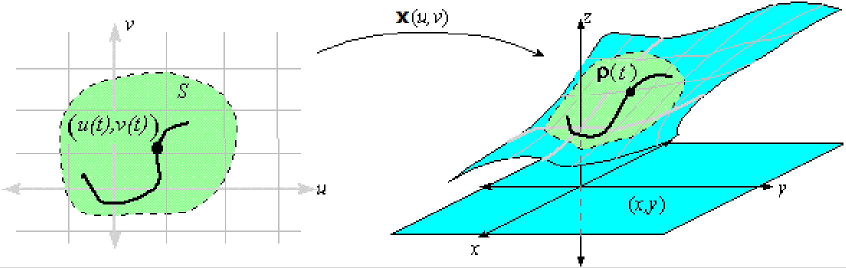
Este producto interno es una forma bilineal simétrica:

- $\langle a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_{\mathbf{p}} = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_{\mathbf{p}} + b\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_{\mathbf{p}}$;
- $\langle \mathbf{w}_1, a\mathbf{w}_2 + b\mathbf{w}_3 \rangle_{\mathbf{p}} = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{p}} + b\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_{\mathbf{p}}$;
- $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle_{\mathbf{p}}$.

Si α es una curva diferenciable sobre la superficie S, cuando calculamos la longitud de arco de α

$$\ell(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt$$

nos gustaría utilizar elementos intrínsecos a la superficie S, sin hacer referencia al espacio métrico ambiente.



Primera forma fundamental

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. La ***primera forma fundamental*** *de S en $\mathbf{p}$ es la forma cuadrática $I_\mathbf{p} : T_\mathbf{p}S \to \mathbb{R}$ dada por*

$$I_\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_\mathbf{p} = ||\mathbf{v}||_\mathbf{p}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S.$$

Observaciones:

- $I_\mathbf{p}$ es apenas la expresión de cómo $T_\mathbf{p}S$ hereda la estructura de producto interno de $\mathbb{R}^3$.
- $I_\mathbf{p}$ es el ejemplo más simple de métrica Riemanniana.

Tenemos

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\, dt.$$

Primera forma fundamental

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ una parametrización de S, y sea $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva contenida en $V \cap S$. Como $\alpha'(t) = \mathbf{x}_u(\alpha(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(\alpha(t)) \cdot v'(t)$, entonces si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap S$ es tal que $\mathbf{p} = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \cdot v'(0),$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0), \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0) \rangle_{\mathbf{p}} \\ &= \big(u'(0)\big)^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} + 2u'(0)v'(0)\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} + \big(v'(0)\big)^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Primera forma fundamental

Si definimos los coeficientes

$$\begin{aligned} E &= E_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}}, \\ F &= F_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}, \\ G &= G_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

Entonces la ecuación anterior se escribe como

$$I_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde todos los coeficientes involucrados son calculados en $t = 0$:

$$E = E(u_0, v_0), \quad F = F(u_0, v_0), \quad G = G(u_0, v_0).$$

Primera forma fundamental

En otras palabras, E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$.

En términos de los parámetros t, en ocasiones en otros libros la ecuación (1) se escribe como

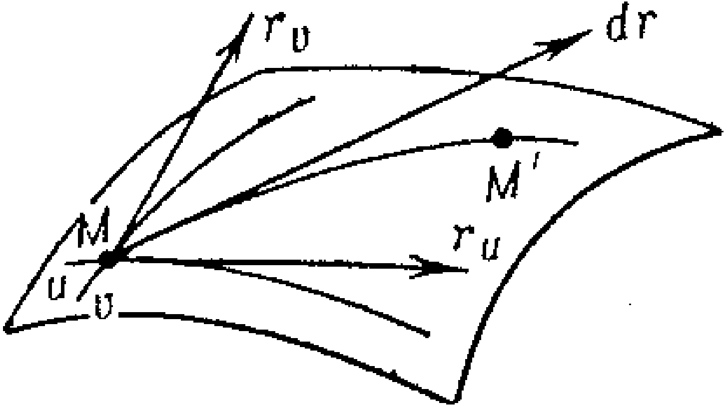
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{2}$$

Aquí, ds^2 (ó ds) es llamado el *elemento de longitud de arco* o *elemento de línea*. Para la curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, la expresión

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E\Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\Big(\frac{du}{dt}\Big)\Big(\frac{dv}{dt}\Big) + G\Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2}\,dt$$

da la longitud de arco.

Primera forma fundamental



Geometría de la primera forma fundamental.

Definición

*Un difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$ entre superficies es llamada una **isometría** si*

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}, \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}} S_1.$$

$$\begin{aligned} f \text{ es isometría} \quad &\iff \quad \big(I_{S_2}\big)_{f(\mathbf{p})}(Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}) = \big(I_{S_1}\big)_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), \ \forall \mathbf{p} \in S_1, \ \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}} S_1 \\ &\iff \quad Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}} S_1 \to T_{f(\mathbf{p})} S_2 \text{ es isometría lineal}, \ \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}} S_1. \end{aligned}$$

Obs! $f : S_1 \to S_2$ es isometría, entonces las parametrizaciones $\mathbf{x}$ de S_1 y $f \circ \mathbf{x}$ de S_2, tienen los mismo coeficientes en la 1a. forma fundamental.

$$\begin{aligned} E_{f\circ\mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{x}}, \\ F_{f\circ\mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = F_{\mathbf{x}}, \\ G_{f\circ\mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_v, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = G_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Proposición

Sean $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_1 \cap S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_2 \cap S_2$ parametrizaciones tales que $E_{\mathbf{x}_1}(u,v) = E_{\mathbf{x}_2}(u,v)$, $F_{\mathbf{x}_1}(u,v) = F_{\mathbf{x}_2}(u,v)$, $G_{\mathbf{x}_1}(u,v) = G_{\mathbf{x}_2}(u,v)$. Entonces, el mapa $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$ es una isometría.

Prueba:
Si $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$, entonces $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} = \mathbf{x}_{2u}$ y $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} = \mathbf{x}_{2v}$, y tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2u} \rangle_{f(\mathbf{p})} = E_{\mathbf{x}_2} = E_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1u} \rangle_{\mathbf{p}}, \\
\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = F_{\mathbf{x}_2} = F_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}}, \\
\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} &= \langle \mathbf{x}_{2v}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = G_{\mathbf{x}_2} = G_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1v}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v}\}$ es base de $T_{\mathbf{p}}S_1$ y $\{\mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v}\}$ es base de $T_{f(\mathbf{p})}S_2$, el resultado se extiende por linealidad a todo vector. Portanto f es isometría. $\square$

Definición

*$f : S_1 \to S_2$ es una **isometría local** si f es un difeomorfismo local.*

*Dos superficies son **localmente isométricas** si para todo punto $\mathbf{p} \in S_1$, existe un punto $\mathbf{q} \in S_2$ y vecindades abiertas $U_1 \subseteq S_1$ de $\mathbf{p}$, $U_2 \subseteq S_2$ de $\mathbf{q}$, tales que $f|_{U_1} : U_1 \to U_2$ es una isometría.*

Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano en $\mathbb{R}^3$).

Sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ una base ortonormal de un plano $S \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{p} \in S$, y consideramos la parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

De ahí, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$ y

$$\begin{aligned} E &= E(u,v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1, \\ F &= F(u,v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0, \\ G &= G(u,v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

La 1a. forma fundamental es

$$I_{\mathbf{p}} = ds^2 = (u')^2 + (v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2: (Superficies de revolución).
Considere la curva regular $(f(v), 0, g(v))$, con $f(v) > 0$, $\forall v \in I$, param. por longitud de arco. Parametrizamos una superficie de revolusión S por

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\big), \quad u \in (0, 2\pi),\ v \in I.$$

Luego, $\mathbf{x}_u = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)$, $\mathbf{x}_v = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v))$, y

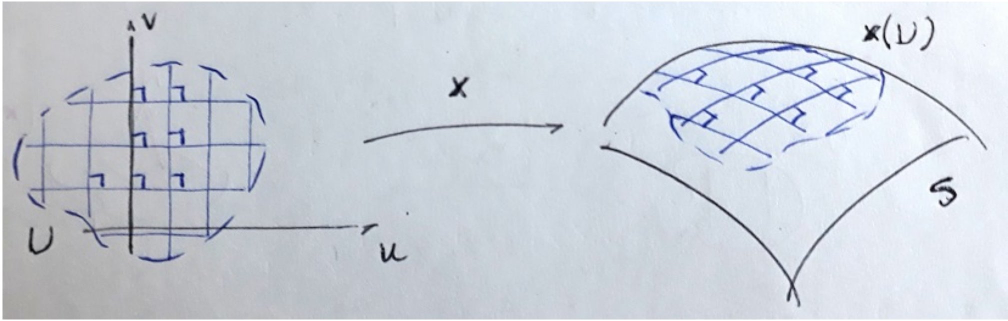
$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle = f(v)^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = f(v)^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = f(v)f'(v)(-\sin u\cos u + \cos u \sin u) = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle = f'(v)^2(\cos^2 u + \sin^2 u) + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1. \end{aligned}$$

$$I_{\mathbf{p}} = (u', v') \begin{pmatrix} f'(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Definición

Las parametrizaciones $\mathbf{x}(u,v)$ *con* $F = 0$*, se llaman* ***ortogonales***.



Ejemplo 3:
¿Existe alguna superficie S no contenida en un plano, que se localmente isométrica al plano?
Respuesta: Sí, hay muchas.
Por ejemplo, el cilindro circular recto $S = S^1 \times \mathbb{R}$, parametrizado por

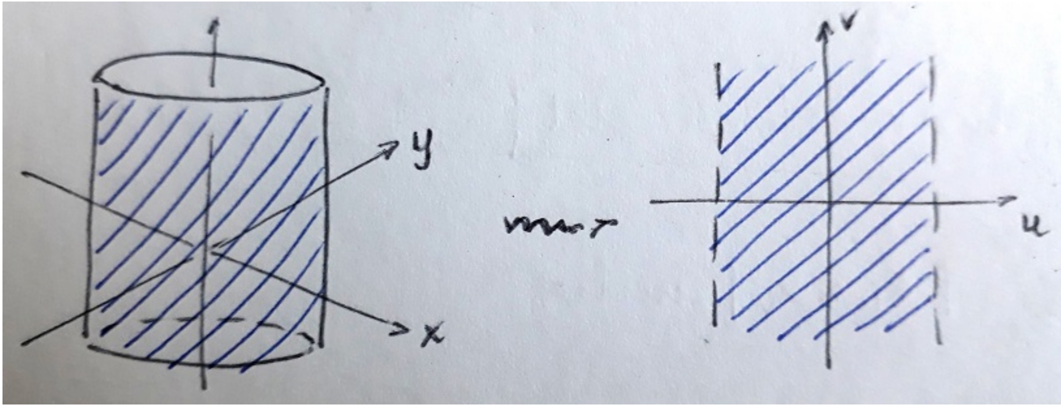
$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \mathbf{x}_v = (0,0,1)$, y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

Así, el cilindro satisface $E = 1, F = 0, G = 1, \forall (u,v) \;\Rightarrow$ tiene la misma 1a. forma fundamental que el plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos



Isometría local entre el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ y la región $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ del plano $\mathbb{R}^2$.