

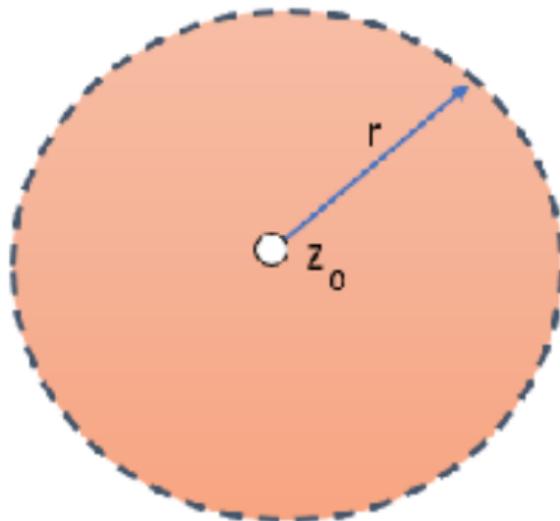
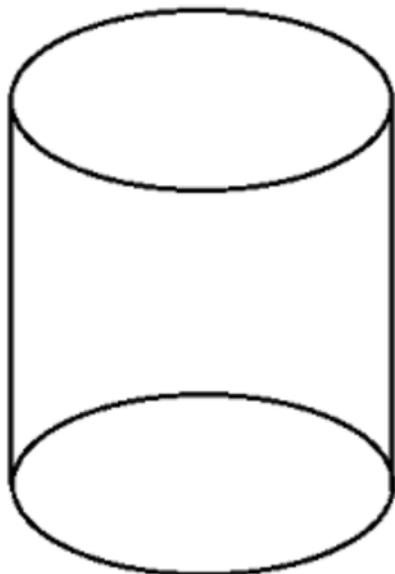
EL PLANO TANGENTE

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

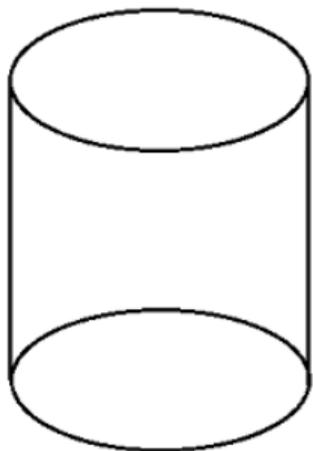
(AULA 12) 19.FEBRERO.2021

Ejercicio

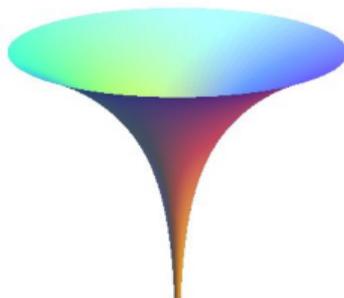
El cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ es difeomorfo al plano puncturado $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.



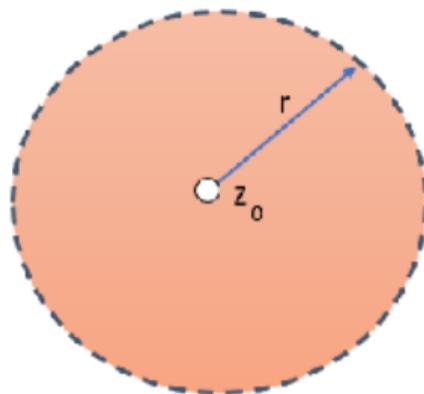
Ejercicio



$f \rightarrow$



$\pi \rightarrow$



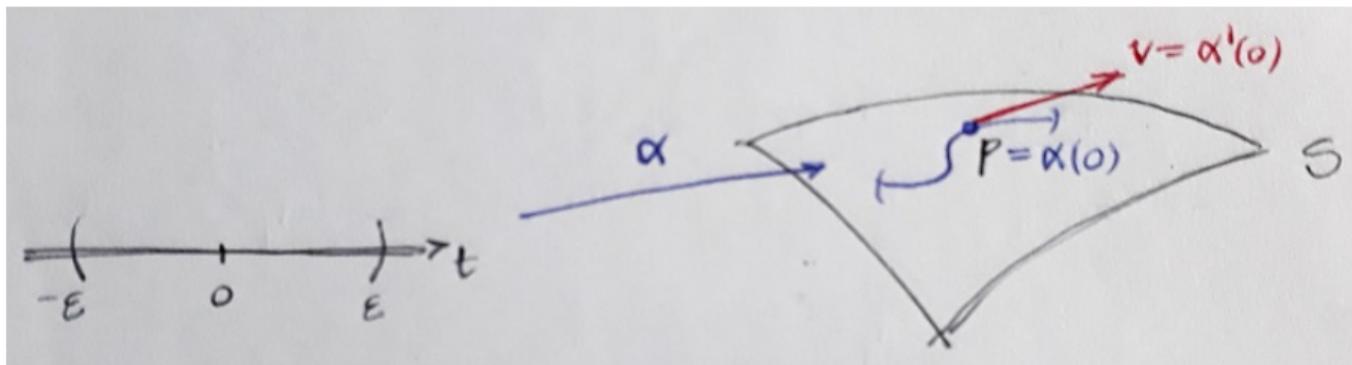
Considere la composición de los mapas

$f : (\cos u, \sin u, v) \rightarrow (\log v \cos u, \log v \sin u, v)$ y $\pi : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$.

El plano tangente

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Diremos que el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es **tangente** a S en el punto $\mathbf{p} \in S$ si existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.



El plano tangente

Propiedad

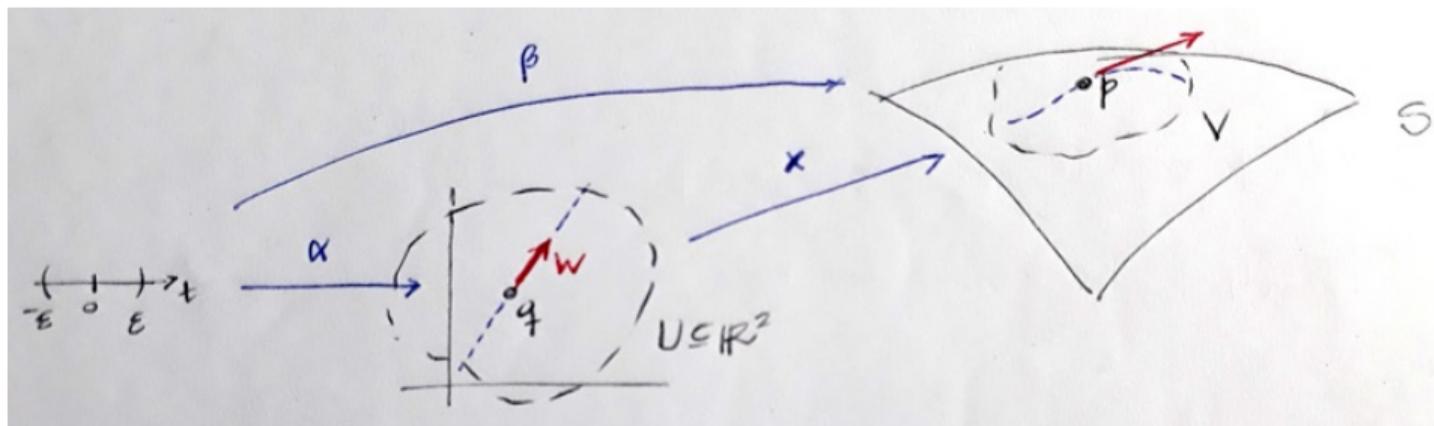
Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subseteq S$ una parametrización de la superficie regular S , en el punto $\mathbf{p} \in V \cap S$, con $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$. Entonces, el conjunto $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$ coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en \mathbf{p} .

Prueba:

Considere $T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } \mathbf{p}\}$. Mostramos que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 = T_{\mathbf{p}}S$.

[\subseteq] Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{w}$ la recta en dirección de \mathbf{w} pasando por \mathbf{q} , dentro del dominio U . Luego, $\alpha(0) = \mathbf{q}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Definamos la curva $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$ sobre S

El plano tangente



Entonces, $\beta(0) = \mathbf{x} \circ \alpha(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, y por la regla de la cadena tenemos

$$\beta'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) = D\mathbf{x}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w},$$

de modo que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$. Como \mathbf{w} es arbitrario, esto muestra que $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2 \subseteq T_{\mathbf{p}}S$.

El plano tangente

[\supseteq] Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Entonces, existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subseteq S$ tal que $\beta(\mathbf{o}) = \mathbf{p}$ y $\beta'(\mathbf{o}) = \mathbf{v}$.

Definamos $\alpha = \mathbf{x}^{-1}\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$. Observe que siendo \mathbf{x} y β diferenciables, entonces α es también diferenciable. Luego,

$$\alpha(\mathbf{o}) = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta(\mathbf{o}) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \text{ y } \alpha'(\mathbf{o}) = \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2.$$

Como $\mathbf{x} \circ \alpha = \beta$, entonces de la regla de la cadena

$$\mathbf{v} = \beta'(\mathbf{o}) = D\mathbf{x}(\alpha(\mathbf{o})) \cdot \alpha'(\mathbf{o}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w} \in D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2.$$

Siendo \mathbf{v} arbitrario en $T_{\mathbf{p}}S$, esto muestra que $T_{\mathbf{p}}S \subseteq D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}^2$, lo que concluye la igualdad. \square

El plano tangente

Corolario

Para todo punto \mathbf{p} de una superficie regular S , el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base para este espacio es $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) \right\}$, donde

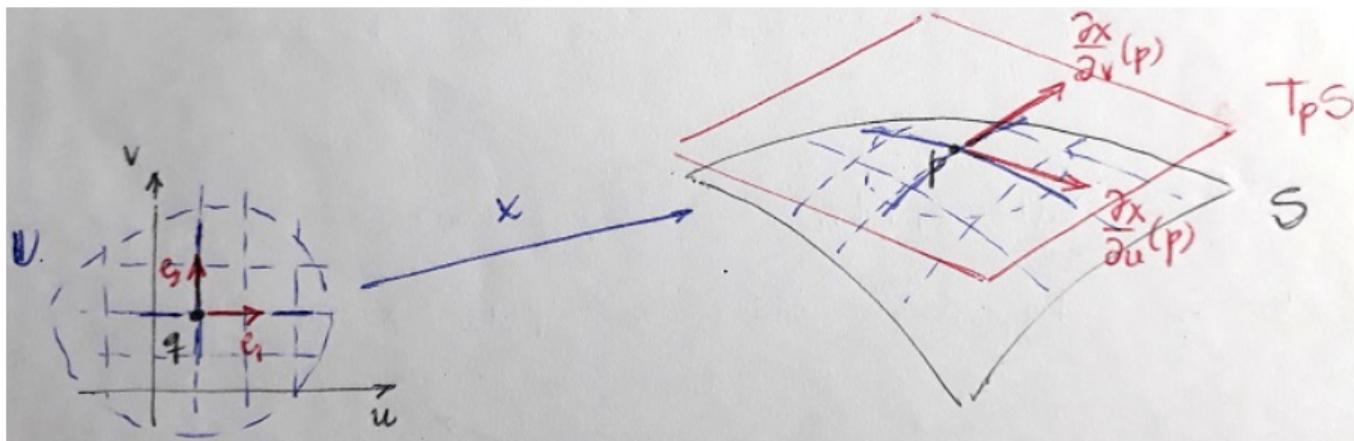
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2.$$

Prueba:

- Como S es superficie regular y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ es una parametrización, la derivada $D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un mapa lineal inyectivo $\Rightarrow T_{\mathbf{p}}S = \text{Im } D\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es un espacio vectorial y $\dim T_{\mathbf{p}}S \geq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

El plano tangente

- Por el Teorema de la Dimensión, $\dim T_p S \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Portanto, $\dim T_p S = 2$.
- Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de \mathbb{R}^2 y $D\mathbf{x}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ es un isomorfismo lineal, entonces $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p})\}$ es una base para $T_p S$. \square



El plano tangente

Definición

A $T_p S$ se le llama el **plano tangente** a la superficie S en \mathbf{p} .

Observaciones:

- La base $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) \right\}$ se llama la **base canónica** o la base de $T_p S$ asociada a la parametrización \mathbf{x} .
- Usualmente escribiremos

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).$$

- El plano tangente $T_p S$ no depende de la elección de la parametrización \mathbf{x} , ni de la curva α .

El plano tangente

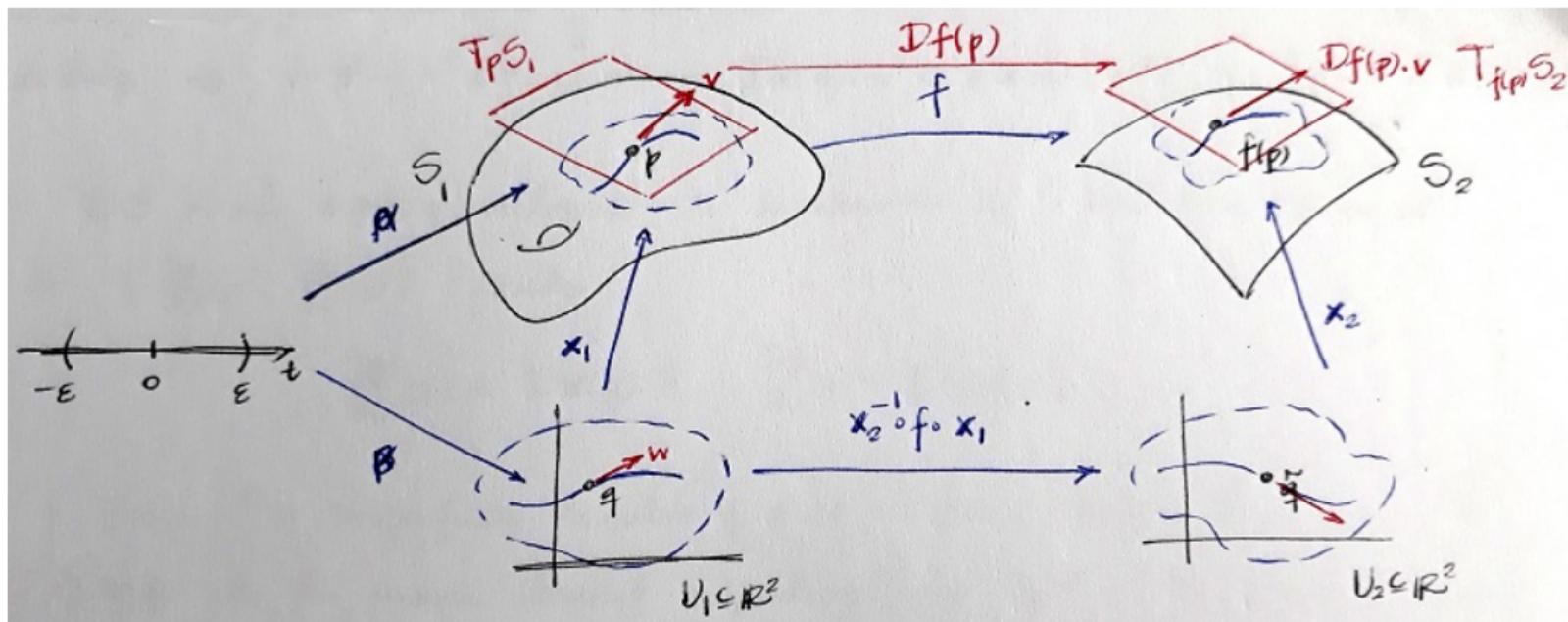
Definición

Sean S_1, S_2 superficies regulares, y sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Dados, $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1$, entonces existe una curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subseteq S_1$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

La **derivada** de f en \mathbf{p} es la aplicación lineal $Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}S_2$ dada por

$$Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (f \circ \alpha)'(0).$$

El plano tangente



El plano tangente

Observaciones:

- La regla de la cadena implica que $(f \circ \alpha)'(\mathbf{o}) = Df(\alpha(\mathbf{o})) \cdot \alpha'(\mathbf{o}) = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$.
- La derivada $Df(\mathbf{p})$ no depende de la curva α .
- Si $\mathbf{x} : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ es una parametrización, y $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U_1)$, definamos $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow_1$ es una curva diferenciable. Suponga que $\beta(t) = (u(t), v(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha'(\mathbf{o}) = (\mathbf{x} \circ \beta)'(\mathbf{o}) = D\mathbf{x}(\beta(\mathbf{o})) \cdot \beta'(\mathbf{o}) = D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot (u'(\mathbf{o}), v'(\mathbf{o})) \\ &= u'(\mathbf{o})D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 + v'(\mathbf{o})D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 = u'(\mathbf{o})\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(\mathbf{q}) + v'(\mathbf{o})\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ &= v_1 \mathbf{x}_u(\mathbf{q}) + v_2 \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

El fibrado tangente

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, con U abierto, una carta local de S . Sea $\mathbf{p} \in S$, y sea $T_{\mathbf{p}}S$ el plano tangente a S en \mathbf{p} .

Definición

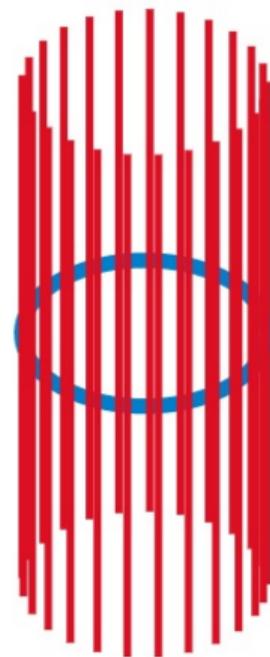
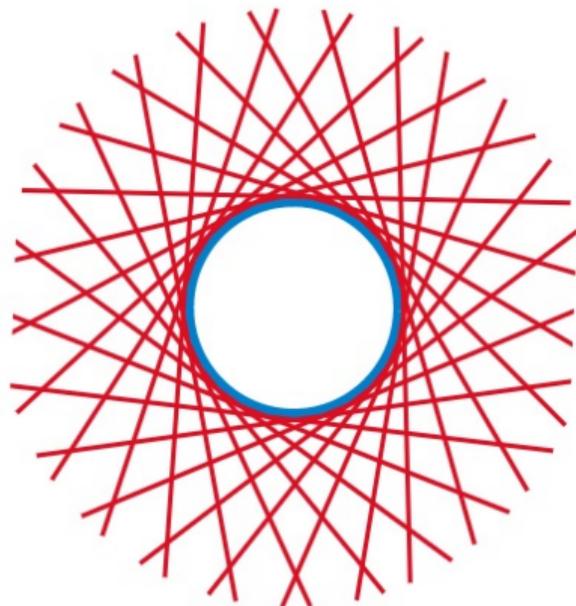
El **fibrado tangente** TS de la superficie S es la unión disjunta de los espacios tangentes $T_{\mathbf{p}}S$ sobre los diferentes puntos \mathbf{p} de la superficie:

$$TS = \bigsqcup_{\mathbf{p} \in S} T_{\mathbf{p}}S = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} \{\mathbf{p}\} \times T_{\mathbf{p}}S.$$

Así, un elemento de TS se puede pensar como un par ordenado (\mathbf{p}, \mathbf{v}) , donde \mathbf{p} es un punto de S y \mathbf{v} es un vector tangente a S en el punto \mathbf{p} . Existe una proyección

$$\pi : TS \rightarrow S,$$

El fibrado tangente



El fibrado tangente TS^1 al círculo S^1 .

El fibrado tangente

Obs!

- Para una curva C (variedad 1-dimensional), el fibrado tangente TC tiene dimensión 2.
- Mientras que un espacio tangente T_pS tiene dimensión 2, el fibrado tangente TS tiene dimensión 4.
- En general, para una variedad n -dimensional M , su espacio tangente T_pM tiene dimensión n , y su fibrado tangente TM tiene dimensión $2n$.