Propiedades globales de curvas planas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 06) 27.enero.2021

Definición

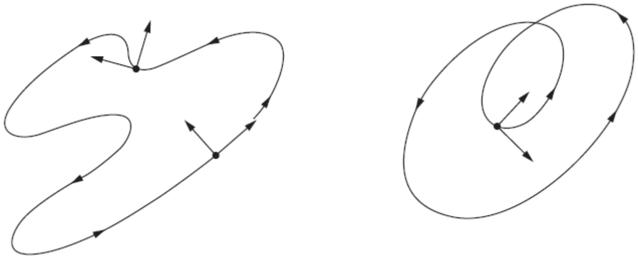
Una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es llamada una* ***curva cerrada*** *si existe una curva* $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *con* $\alpha = \tilde{\alpha}|_{[a,b]}$, *y tal que*

$$\tilde{\alpha}(t + b - a) = \tilde{\alpha}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, $\alpha(b) = \alpha(a)$ *y* $\alpha'(b) = \alpha'(a)$. *La curva* $\tilde{\alpha}$ *también se llama una curva periódica.*

Una curva cerrada α *se llama* ***cerrada simple****, si* $\alpha|_{[a,b)}$ *es inyectiva, esto es, no existen puntos tales que* $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ *con* $a \leq t_1 < t_2 < b$ *(i.e. la curva no tiene autointersecciones en* $[a, b)$*).*
De forma alternativa, una curva cerrada simple es una inmersión o encaje del círculo S^1 *en* $\mathbb{R}^n$, *(*$\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^n$ *inyectiva).*

Curvas cerradas



(a) curva cerrada simple, (b) curva cerrada no simple.

La teoría global de curvas está interesada en estudiar propiedades de las curvas cerradas. En particular, propiedades de la curvatura total (integrada)

$$\int_a^b \kappa(t)|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^L \kappa(s)\,ds.$$

Curvas cerradas

Vamos a trabajar principalmente curvas en $\mathbb{R}^2$. En este caso, recordamos el siguiente resultado (sin prueba)

Teorema (Teorema de la curva de Jordan)

*Toda curva cerrada simple $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ en el plano divide al plano $\mathbb{R}^2$ en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva α como frontera común. Una de estas componentes está limitada (el **interior** de la curva) y la otra es no acotada y se le llama **exterior**.*

Comentarios:

El teorema no vale en todas las superficies. Existe una generalización llamada el Teorema de Jordan-Schönflies (sólo vale en dos dimensiones), o a más dimensiones, el Teorema de Schönflies.

La desigualdad isoperimétrica

Pregunta:

De entre todas las curvas cerradas simples en el plano, con longitud L, ¿cuál de ellas delimita la mayor área?

El problema de Dido:

La desigualdad isoperimétrica

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada, cerrada simple en el plano, $\alpha(t9 = (x(t), y(t))$.
Recordemos que el área A de la región R delimitada por α es

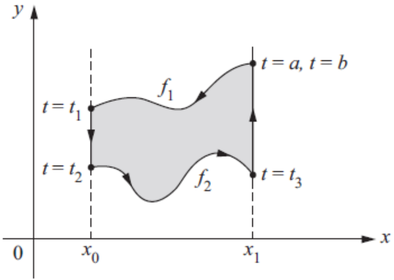
$$A = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt = -\int_a^b x(t)'y(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)\,dt.$$

(para ello, basta tomar la forma diferencial $\omega = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$), y por el Teorema de Stokes

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega = \int_R \tfrac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) = \int_R \tfrac{1}{2}(2dx \wedge dy) = \int_R dx\,dy = A(R).$$

La desigualdad isoperimétrica

Para mostrar la primer fórmula, consideramos una región del tipo I, y la curva $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$.



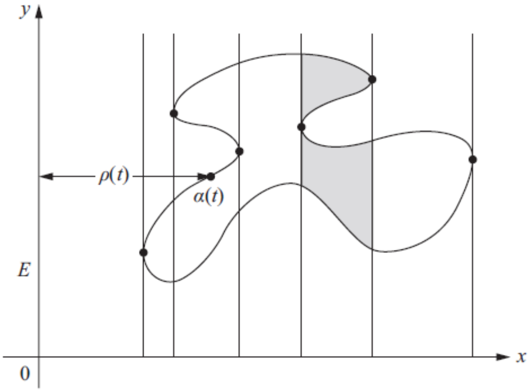
$$\alpha_1(t) = (t, f_1(t)),$$
$$\alpha_2(t) = (x_0, t_1 + t(t_0 - t_1)),$$
$$\alpha_3(t) = (t, f_2(t)),$$
$$\alpha_4(t) = (x_1, t_3 + t(t_4 - t_3))$$

El área A del interior de α es

$$\begin{aligned}
-\int_a^b y(t)\,dx(t) &= -\int_a^{t_1} y(t)\,dx(t) - \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dx(t) \\
&\quad - \int_{t_2}^{t_3} y(t)\,dx(t) - \int_{t_3}^{b} y(t)\,dx(t) \\
&= -\int_{t_0}^{t_1} f_1(t)\,dt - \int_{t_2}^{t_3} f_2(t)\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\,dx \\
&= A.
\end{aligned}$$

La desigualdad isoperimétrica

Para el caso general de una curva cerrada arbitraria, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, se divide el interior de la curva en un número finito de regiones del tipo I.



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

La desigualdad isoperimétrica

Para mostrar la otra ecuación, $A = \int x\, dy$, se procede de la misma forma que el caso anterior, pero considerando regiones del tipo II.

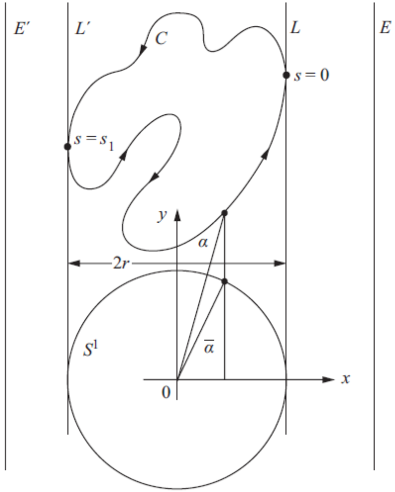
Ya podemos enunciar nuestro resultado principal de hoy:

Teorema (Desigualdad isoperimétrica)

Sea C una curva plana cerrada simple, con longitud L, y sea A el área de la región limitada por C. Entonces,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Además, la igualdad se verifica si, y sólo si, C es un círculo.



Prueba: Sean E, E' rectas paralelas que encierran a la curva C, y mueva estas rectas hasta que toquen tangencialmente a C. Obtenemos rectas ℓ y ℓ' tangentes a C.

Consideremos el círculo S^1 que es tangente a ℓ y ℓ', y que no intersecte a C. Sea R el radio de este círculo. Sea O el centro de ese círculo, y sea Ox el eje perpendicular a ℓ, ℓ', Oy el eje paralelo a esas rectas.

Parametrizamos C por longitud de arco como

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)),$$

de modo que C tenga orientación positiva.

Vamos a suponer que los puntos de tangencia de C con ℓ y ℓ' ocurren, respectivamente, en $s = 0$ y $s = s_1 > 0$.

Por otra parte, podemos suponer que la ecuación parametrizada de S^1 es dada por

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (x(s), \tilde{y}(s)) = \Big(x(s), \pm R\sqrt{1 - x(s)^2}\Big).$$

Tenemos,

$$A = \int_0^L x(s)y'(s)\,ds, \quad \tilde{A} = \pi R^2 \int_0^L x(s)\tilde{y}'(s)\,ds = -\int_0^L \tilde{y}(s)x'(s)\,ds.$$

Sumando ambas áreas, obtenemos

La desigualdad isoperimétrica

$$
\begin{aligned}
A+\tilde{A} &= A+\pi R^2 = \int_0^L \big(x(s)y'(s)-\tilde{y}(s)x'(s)\big)\,ds = \int_0^L (x',y')\cdot(-\tilde{y},x)\,ds \\
&\leq \int_0^L \big|(x',y')\cdot(-\tilde{y},x)\big|\,ds \\
&\leq \int_0^L \big|(x',y')\big|\cdot\big|(-\tilde{y},x)\big|\,ds \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \int_0^L \underbrace{|\alpha'(s)|}_{=1}\cdot\underbrace{|\tilde{\alpha}(s)|}_{=R}\,ds \\
&\leq \int_0^L R\,ds = LR.
\end{aligned}
$$

La desigualdad isoperimétrica

Usamos ahora la desigualdad AM-GM:

$$\sqrt{A \cdot \pi R^2} \leq \tfrac{1}{2}(A + \pi R^2) \leq \tfrac{1}{2} LR$$

$\Rightarrow\; A \cdot \pi R^2 \leq \frac{1}{4} L^2 R^2 \;\Rightarrow\; 4A\pi \leq L^2$, o equivalentemente,

$$L^2 - 4A\pi \geq 0.$$

Mostramos ahora la condición de la igualdad.

($\Leftarrow$) Si C es un círculo, entonces $A = \pi R^2$ y $L = 2\pi R$. Luego

$$L^2 - 4A\pi = (2\pi R)^2 - 4(\pi R^2)\pi = 4\pi^2 R^2 - 4\pi^2 R^2 = 0.$$

La desigualdad isoperimétrica

($\Rightarrow$) Suponga ahora que vale la igualdad $L^2 = 4A\pi$. Eso sólo puede ocurrir si se cumple la igualdad en la desigualdad anterior. En particular, si ocurre la igualdad en Cauchy-Schwarz

$$\int_0^L \big|\alpha'(s)\cdot\tilde{\alpha}(s)\big|\,ds = \int_0^L \big|\alpha'(s)\big|\cdot\big|\tilde{\alpha}(s)\big|\,ds,$$

$\Rightarrow\ \alpha'(s)$ es múltiplo de $\tilde{\alpha}(s)$, $\forall s$. Luego

$$\alpha'(s) = \tfrac{1}{R}\big(-\tilde{y}(s), x(s)\big) \implies y'(s) = \tfrac{1}{R}x(s), \ \ \forall s.$$

Como R no depende de la dirección, podemor repetir la construcción anterior con Oy perpendicular a las rectas ℓ, ℓ'. De ahí que también $x'(s) = \frac{1}{R}y(s)$, $\forall s$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} |\alpha(s)|^2 &= x^2(s) + y^2(s) = (Ry')^2(s) + (Rx')^2(s) = R^2\left[(x')^2(s) + (y')^2(s)\right] \\ &= R^2|\alpha'(s)|^2 = R^2, \quad \forall s \in [0, L]. \end{aligned}$$

Esto muestra que la curva C es un círculo de radio R. $\square$