Teoría local de curvas parametrizadas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 03) 20.enero.2021

Curvas planas

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular ($\alpha' \neq 0$), parametrizada por longitud de arco. Denotamos al vector tangente como

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s), \quad \forall s \in I.$$

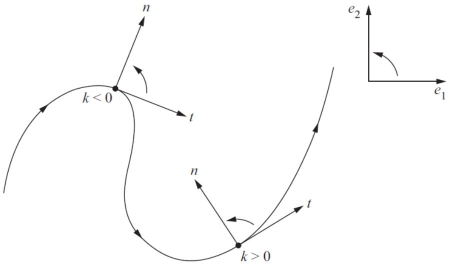
Definimos un vector normal unitario $\mathbf{n}(s) \in \mathbb{R}^2$ de modo que las bases ortonormales $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ tengan la misma orientación.

Como $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = |\mathbf{t}(s)|^2 = 1$, diferenciando respecto de s

$$2\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0.$$

Luego, $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}'(s)$ son ortogonales, y se tiene que

$$\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$



Definición

*El número $\kappa(s)$ se llama la **curvatura** de α en el punto s.*

El signo de $\kappa(s)$ indica la dirección en la cual rota la curva α (o su tangente). $\kappa(s) > 0$ indica que la curva rota a la izquierda, $\kappa < 0$ indica que rota hacia la derecha.

A la recta generada por el vector $\mathbf{n}(s)$ se le llama la *recta normal*.

Definición

*Los puntos donde $\alpha''(s) = 0$ se llaman **puntos de inflexión**, y corresponden a aquellos puntos donde la curvatura κ cambia de signo.*

Se tiene el siguiente sistema de EDOs

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s),$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}.$$

Estas ecuaciones son llamadas las **fórmulas de Frenet.**

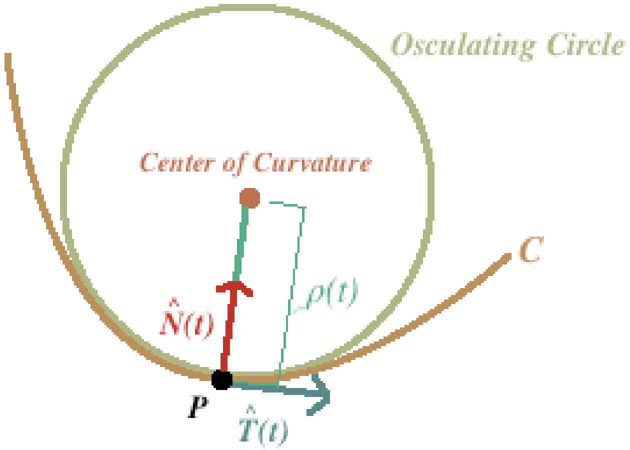
Fijemos $s \in I$, y sea $P = \alpha(s)$, y sea ℓ la recta normal a α en P. Tomemos otro punto de la curva $Q = \alpha(s + h)$. Consideremos la recta normal m a α en Q. Y sea C el punto de intersección de las rectas ℓ y m.

Es posible mostrar que al tomar $h \to 0$, el punto C se estabiliza. Este punto resulta ser el centro de un círculo, que es tangencial a la curva en el punto P,

Definición

Este círculo con centro C tangente a la cuva α en el punto $\alpha(s) = P$ se llama el ***círculo osculador*** *a α en s.*

Curvas planas



Ejemplo:

Consideremos un círculo de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$. Su parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$, $\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$
y $\alpha''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r})$.
De ahí que

$$\mathbf{t}' = \tfrac{1}{r}\mathbf{n} \Rightarrow \kappa(s) = \tfrac{1}{r}, \quad \forall s.$$

- Si α es un círculo, su curvatura $\kappa(s)$ es constante.

Teorema

Teorema: Una curva plana regular α tiene curvatura constante si, y sólo si, α es un trazo de círcunferencia, o α es un segmento de recta.

Prueba:

- Caso $\kappa = 0$: $\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(s) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.
- Caso $\kappa > 0$: $(\Leftarrow)$ Acabamos de mostrar que un círculo tiene curvatura constante.
  $(\Rightarrow)$ Considere la cantidad $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$. Observe que al derivar
  $$\big(\alpha(s) + \tfrac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)\big)' = \mathbf{t}(s) - \tfrac{1}{\kappa}\kappa\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) = \mathbf{0},$$
  de modo que $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s) = C$ es constante. Esto muestra que α es un trazo de circunferencia con centro en C.

- Toda curva plana regular α, con curvatura no nula en el punto s, posee un círculo centrado en $C(s)$:

$$C(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s),$$

su *círculo osculador*.

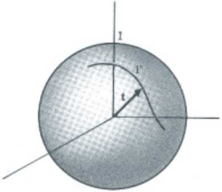
- Este círculo es tangente a α en el punto s (punto de contacto de orden 2).
- La curva $C(s)$ formada por todos los centros de estos círculos osculadores a α, $s \mapsto C(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, se llama la **evoluta** o **curva focal** de α.

Proposición

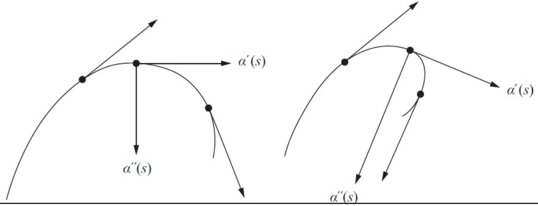
Sea α una curva plana regular. El radio de círculo osculador de α en s está dado por $\rho(s) = 1/\kappa(s)$.

Teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco (α es clase C^3 y regular). Entonces $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in I$.



Como $|\alpha'(s)|$ es constante, la segunda derivada $|\alpha''(s)|$ mide la tasa de variación de la dirección de $\alpha'(s)$.
Así, $|\alpha''(s)|$ proporciona una medida de cuán rápido la curva α se aleja de la recta tangente:



Definición

*Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, parametrizada por longitud de arco. Definimos la **curvatura** de α en el punto s por*

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|.$$

- $\kappa(s) \geq 0$, ya que corresponde a la norma de un vector.
- Si $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces
$$\alpha'(s) = \mathbf{v}, \ \alpha''(s) = \mathbf{0}, \ \forall s \ \Rightarrow \ \kappa(s) = 0, \ \forall s.$$
- Recíprocamente, si α es una curva tal que $\kappa(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\alpha''(s) = 0$ y por integración, $\alpha(s) = \mathbf{u} + \mathbf{v}s$ es una recta.

Observe que $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = |\alpha'(s)|^2 = 1$. Diferenciando respecto de s

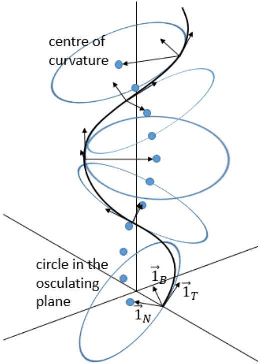
$$2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = \alpha''(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0.$$

Luego, $\alpha''(s)$ y $\alpha'(s)$ son ortogonales.

Si $\alpha''(s) \neq \mathbf{0}$, podemos definir un vector unitario $\mathbf{n}(s)$ en la dirección de $\alpha''(s)$ por

$$\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Además, denotamos $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$.



Curvatura y torsión

Tenemos entonces

$$\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{t}(s), \quad \forall s \text{ donde } \kappa(s) \neq 0.$$

El vector $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente a α en s. El vector $\mathbf{n}(s)$ se llama el vector normal a α en s. El plano generado por $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ se llama el **plano osculador** o **plano osculante** a α en s.

Obs: Si $\alpha''(s) = \mathbf{0}$, el vector $\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$ y el plano osculador no está definido. Los puntos donde $\alpha''(s) = \mathbf{0}$ se llaman *puntos singulares de orden 1* (los puntos donde $\alpha'(s)$ se llaman *puntos singulares de orden 0*).

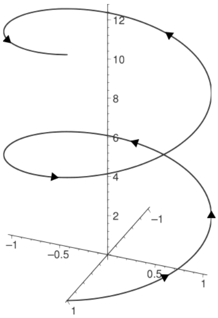
En lo que sigue, nos restringimos a curvas sin puntos singulares de orden 0 ó 1.

El vector unitario

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

es normal al plano osculador y se llama el **vector binormal** a α en s.

Como $|\mathbf{b}(s)| = |\mathbf{t}(s)| \cdot |\mathbf{n}(s)| = 1$, entonces $|\mathbf{b}(s)|$ mide la tasa de variación del ángulo del plano osculador en una vecindad de s.



Curvatura y torsión

Tenemos varias relaciones entre $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$:

- $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.
- $$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \big(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)' = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \underbrace{\big(\kappa(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s)\big)}_{=0} + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{t}(s)$, y como $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$ (¿por qué?), entonces $\mathbf{b}'(s)$ es paralelo a $\mathbf{n}(s)$.

De ahí que podemos escribir $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Definición

*El número $\tau(s)$ se llama la **torsión** de α en el punto s*

- Contrario a la curvatura, $\tau(s)$ puede ser positiva o negativa, ó cero.
- Si $\alpha(s)$ es una curva plana, entonces $\alpha(I)$ está contenida en un plano, el cual coincide con el plano osculador $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$, $\forall s$. Consecuentemente, $\tau(s) = 0$, $\forall s$.
- Recíprocamente, si $\tau(s) = 0$, $\forall s$, entonces $\mathbf{b}'(s) = 0 \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}(s)$ es constante, digamos $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^3$. Luego,
$$\big(\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0\big)' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$
Luego $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0$ es constante $= 0 \Rightarrow \alpha$ es una curva contenida en un plano normal a $\mathbf{b}_0$, y α es una curva plana.

El triedro móvil

Al cambiar la orientación de α, el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ cambia de dirección, el vector normal $\mathbf{n}(s)$ no cambia $\Rightarrow$ $\mathbf{b}(s)$ cambia de dirección. Así, la curvatura κ y la torsión τ son invariantes al cambiar orientación.

Para cada $s \in I$ hemos definido tres vectores unitarios $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$. Las derivadas de estos vectores satisfacen $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$. Además $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal en cada punto $\alpha(s) \Rightarrow \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$ y

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}'(s) &= \big(\mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)\big)' = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\
&= [\tau(s)\mathbf{n}(s)] \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times [\kappa(s)\mathbf{n}(s)] \\
&= \tau(s)[\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] + \kappa(s)[\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s)] \\
&= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).
\end{aligned}$$

El triedro móvil

Obtenemos entonces el sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \forall s \in I. \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

que en forma matricial, se escribe como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}, \quad \forall s \in I.$$

Estas EDO se llaman las **fórmulas de Frenet.**

El triedro móvil

Definición

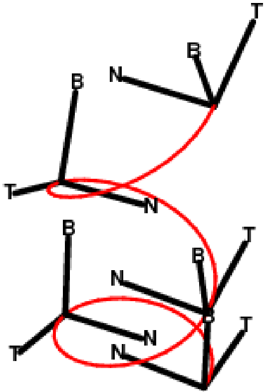
El sistema $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ *se llama el* ***triedro de Frenet-Serret***, ***triedro móvil*** *o* ***referencial móvil***.

Definición

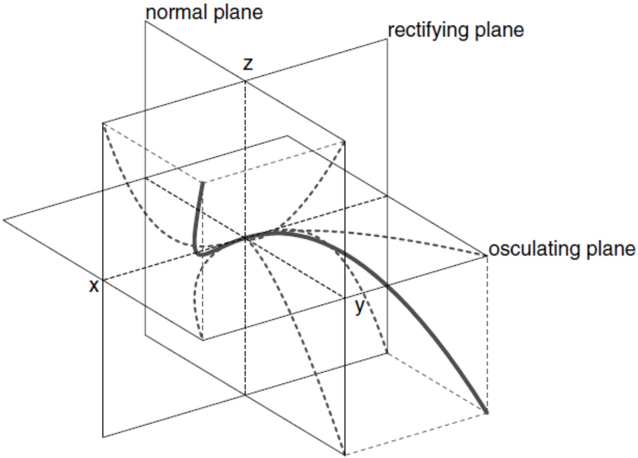
Al plano $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, *pasando por* $\alpha(s)$, *se le llama* ***plano rectificante***, *mientras que al plano* $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ *se le llama el* ***plano normal***.

Definición

La recta generada por $\mathbf{t}(s)$ *es la* ***recta tangente***, *la recta generada por* $\mathbf{n}(s)$ *es la* ***recta normal principal***, *y la recta generada por* $\mathbf{b}(s)$ *es la* ***recta binormal***.



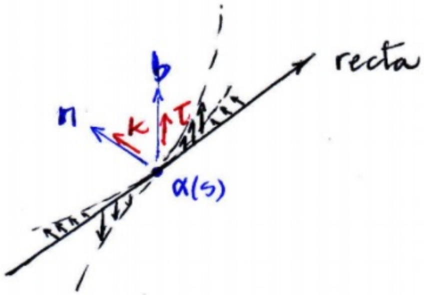
El triedro móvil



El triedro móvil

Obs. Usualmente, una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que es de clase C^3, regular, y tal que $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ nunca se anulan, se llama una **curva de Frenet**.

Físicamente, una curva de Frenet puede pensarse como la deformación de una recta cuando esta es enrollada por la acción de $\kappa(s)$ y torcida por la acción de $\tau(s)$.



Forma canónica local

El triedro de Frenet proporciona un marco de referencia apropiado para estudiar curvas en $\mathbb{R}^3$.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva de Frenet (clase C^3 y regular), de modo que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ siempre es una base de $\mathbb{R}^3$.

Consideramos la expansión de Taylor de $\alpha(s)$ alrededor de $s = 0$

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + o(s^3).$$

($o(s^3)$ es un término que satisface $\lim_{s\to 0} \dfrac{o(s^3)}{s^3} = 0$).

Como $\alpha'(0) = \mathbf{t}(0) = \mathbf{t}$, $\alpha''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0) = \kappa\mathbf{n}$ y

$$\alpha'''(0) = (\kappa(s)\mathbf{n}(s))'\Big|_{s=0} = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b},$$

Forma canónica local

Al sustituir en el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha(s) &= \alpha(0) + s\mathbf{t} + \frac{s^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{s^3}{6}(\kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b}) + o(s^3) \\
&= \alpha(0) + \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa s^2}{2} - \frac{\kappa' s^3}{6}\right)\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa\tau s^3}{6}\right)\mathbf{b} + o(s^3).
\end{aligned}
$$

Tomamos ahora un sistema de coordenasa $Oxyz$, de modo que el origen O coincide con $\alpha(0)$, $\mathbf{t} = (1,0,0)$, $\mathbf{n} = (0,1,0)$ y $\mathbf{b} = (0,0,1)$.

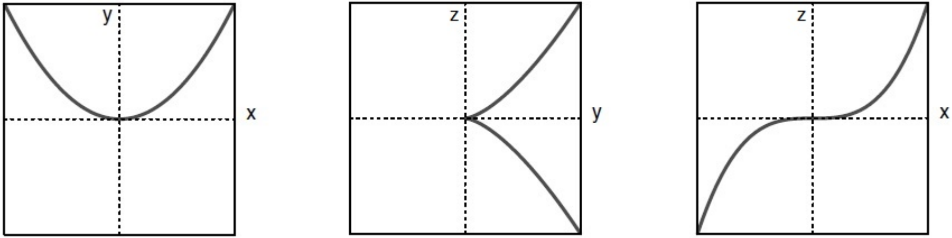
Entonces, la curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ es dada por:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= s - \tfrac{1}{6}\kappa^2 s^3 + o(s^3)_x, \\
y(s) &= \tfrac{1}{2}\kappa s^2 + \tfrac{1}{6}\kappa' s^3 + o(s^3)_y, \\
z(s) &= -\tfrac{1}{6}\kappa\tau s^3 + o(s^3)_z.
\end{aligned}
$$

Cuando s es muy pequeño, podemos aproximar la forma de $\alpha(s)$ por

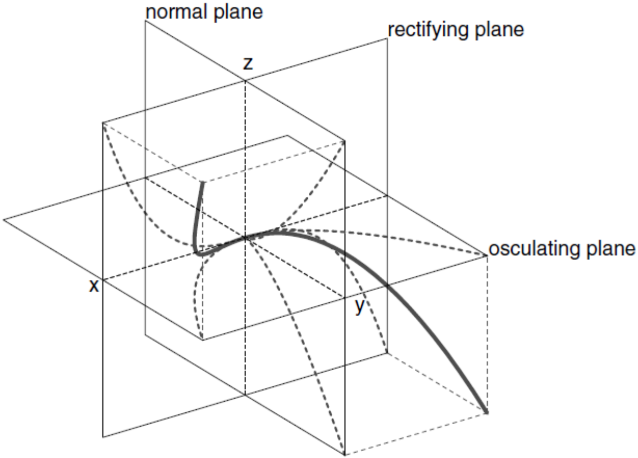
$$\begin{aligned} x(s) &\approx s, \\ y(s) &\approx \tfrac{1}{2}\kappa s^2, \\ z(s) &\approx -\tfrac{1}{6}\kappa\tau s^3. \end{aligned}$$

y esperamos obtener algo parecido a $y = \frac{1}{2}\kappa x^2$, $z = -\frac{1}{6}\kappa\tau x^3$, y $z^2 = \frac{2}{9}\frac{\tau^2}{\kappa}y^3$.



(a) Osculating plane (b) Normal plane (c) Rectifying plane

Forma canónica local



Forma canónica local de las curvas de Frenet.

Definición

*Sea $\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, parametrizada por longitud de arco, y de clase C^n. α es una **curva de Frenet** si en todo punto s, los vectores $\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(n-1)}(s)$ son l.i.*

*El **referencial de Frenet** de α se define como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y está únicamente determinado por*

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*
- *Para todo $k = 1, \ldots, n-1$, $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \alpha'(s), \ldots, \alpha^{(k)}(s) \rangle$.*
- $\langle \alpha^{(k)}(s), \mathbf{e}_k \rangle > 0$*, para $k = 1, \ldots, n-1$.*

Obs: Se puede usar el método de Gram-Schmidt para construir el referencial de Frenet a partir de las primeras $n-1$ derivadas α en s.

Teorema

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva de Frenet en $\mathbb{R}^n$, con referencial de Frenet $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Entonces, existen funciones $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$, definidas en I, con $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} > 0$, tales que κ_i es de clase C^{n-1-i} y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \ldots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad \forall s.$$

Definición

*κ_i se llama la **i-ésima curvatura de Frenet**, y el sistema anterior se llaman las **fórmulas de Frenet**.*

Prueba:

Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, podemos descomponer

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para cada $1 \leq i \leq n-1$, el vector $\mathbf{e}_i$ está en el subespacio generado por $\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(i)}$,

$\Rightarrow \mathbf{e}_i'$ está en el subespacio $\langle \alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(i+1)}(s) \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$.

Luego,

$$\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+2}\rangle = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+3}\rangle = \ldots = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_n\rangle = 0.$$

Definimos $\kappa_i = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1}\rangle$.

Por construcción del referencial de Frenet, para $1 \leq i \leq n-2$, el signo de $\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1}\rangle$ es el mismo signo de $\langle \alpha^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1}\rangle$, el cual es positivo (condición 3).
De ahí que $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} > 0$.

Por otro lado, como los $\mathbf{e}_i$ son ortonormales, tenemos $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$.
Derivando en s,

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle' = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j\rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j'\rangle = 0.$$

En particular, de la ecuación anterior

$$\langle \mathbf{e}_{i+1}', \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_{i+1} \rangle = -\kappa_i. \ \square$$

<u>Comentarios</u>:

- Una curva de Frenet rn $\mathbb{R}^n$ está contenida en un hiperplano H si, y sólo si, $\kappa_{n-1} = 0$.
  Esto es equivalentemente a requerir que $\mathbf{e}_n$ sea un vector constante $\kappa_{n-1} = 0$, el cual es perpendicular a este hiperplano H.

- Como consecuencia, en ocasiones κ_{n-1} se llama la **torsión** de α.