Curvas parametrizadas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 02) 15.enero.2021

Definición

*Una **curva parametrizada** α en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable definida en un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$.*

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{para } t \in (a, b).$$

- La función α lleva el parámetro $t \in (a, b)$ en un punto $\alpha(t)$ de $\mathbb{R}^n$.
- Cuando decimos que α es diferenciable, usualmente endenderemos estos como que α es clase C^∞ (infinitamente diferenciable).
  Obs! En el libro de Do Carmo, diferenciable = C^∞. Cuidado!, en otros textos, diferenciable = C^1. Cuando sea conveniente, indicaremos explícitamente que α es de clase C^k.
- Entenderemos intervalo abierto en el sentido amplio (incluimos los casos $a = -\infty$, $b = \infty$).

Sea $\alpha(t)$ una curva de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. La derivada

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

será llamada el **vector tangente** (o *vector velocidad*) de α en el punto t.

Si $I = (a, b)$, la imagen $\alpha(I)$ se llama el **trazo** de la curva α.

- No se debe confundir a la curva α con su trazo. Pueden existir diferentes curvas, todas con un mismo trazo o imagen.

Ejemplo

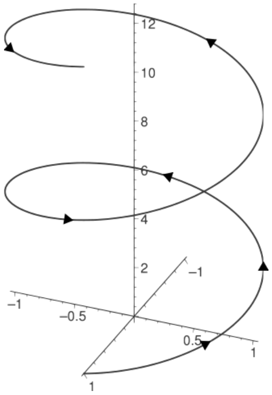
Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, la curva parametrizada

$$\alpha(t) = (a\cos ct, a\sin ct, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene por trazo una hélice de paso $2\pi b$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ en $\mathbb{R}^3$.

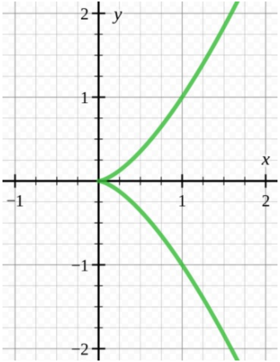
α es una curva parametrizada diferenciable (de clase C^∞). Su vector tangente está dado por

$$\alpha'(t) = (-ac\sin ct, ac\cos ct, b) \in \mathbb{R}^3.$$



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplo



$y^3 = x^2$.

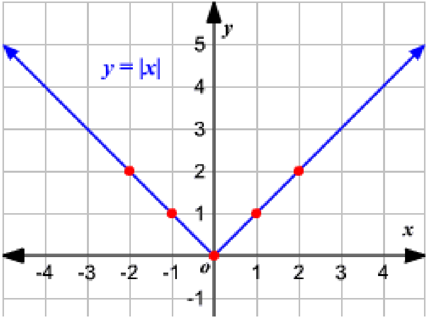
La aplicación $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$, s una curva parametrizada diferenciable (clase C^∞), Su trazo es una cúspide.

Su derivada es $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$. Observe que en $t = 0$, $\alpha(0) = (0, 0)$ y su vector tangente es $\alpha'(0) = (0, 0)$.

Cuando sea conveniente, identificaremos una curva α en $\mathbb{R}^m$ a una curva en $\mathbb{R}^{m+p}$ mediante una inclusión $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \longrightarrow (x_1(t), \ldots, x_m(t), 0, 0, \ldots, 0)$.

Ejemplo

La curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data por $\alpha(t) = (t, |t|)$, no es una curva diferenciable en $t = 0$. En este caso, α sólo es de clase C^0.



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos

Las curvas parametrizadas $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t) \end{aligned}$$

ambas poseen el mismo trazo (el círculo unitario S^1). Observe que el vector velocidad de la curva β es el doble del de la curva α.

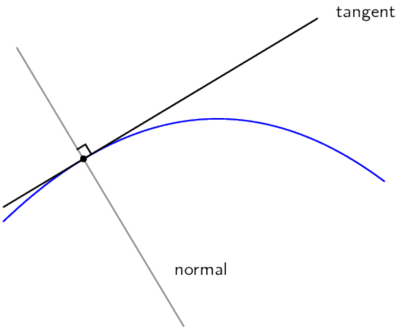
$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t) & |\alpha'| &= 1, \\ \beta'(t) &= (-2\sin 2t, 2\cos 2t) & |\beta'| &= 2. \end{aligned}$$

(la curva β recorre el círculo el doble de rápido que α).

Curvas parametrizadas

Sea α una curva parametrizada de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Si $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ en un punto $\mathbf{p} = \alpha(t)$, entonces en el punto $\mathbf{p}$ está bien definida una recta en la dirección de $\mathbf{v} = \alpha'(t)$.

Esta se llama la **recta tangente** a α en el punto $\mathbf{p}$.



- Esta recta es esencial para el desarrollo de la geometría diferencial de curvas.
- Usualmente requeriremos que una curva α tenga recta tangente definida en todos sus puntos.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de clase C^1. Si para algún $t \in (a,b)$ se tiene que $\alpha'(t) = \mathbf{0}$, entonces diremos que t es un ***punto singular*** *de α.*
Un punto $t \in (a,b)$ donde $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ se llama un ***punto regular*** *de α.*

Definición

Una curva $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$, para todo $t \in (a,b)$, se llama una ***curva parametrizada regular****.*

Obs! De ahora en adelante nos limitamos a estudiar curvas regulares.

Definición

*Sea $\alpha : I = (c_1, c_2) \to \mathbb{R}^n$ una curva regular de clase C^1. La **longitud de arco** de α, a partir de punto $t_0 \in I$ es*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau.$$

¿Por qué se define así la longitud de arco?

Recordemos que si $[a, b] \subset I$ y $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$, podemos definir una poligonal $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$, con $P_i = \alpha(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Longitud de arco

La longitud de esta poligonal es

$$\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} |P_i - P_{i-1}| = \sum_{i=1}^{k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Por el Teorema del Valor Medio, como α es diferenciable (en todo punto), para cada $i = 1, 2, \dots, k$, existen $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tales que

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})| = |\alpha'(\xi_i)|\, \Delta t_i.$$

Luego $\ell(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha'(\xi_i)|\, \Delta t_i$, y tomando el límite en la norma de la partición, obtenemos

Longitud de arco

$$s = \ell(\alpha) = \lim_{\Delta P \to 0} \ell(\alpha, P) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

Como $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, la función $s(t)$ es diferenciable y

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = |\alpha'(t)|.$$

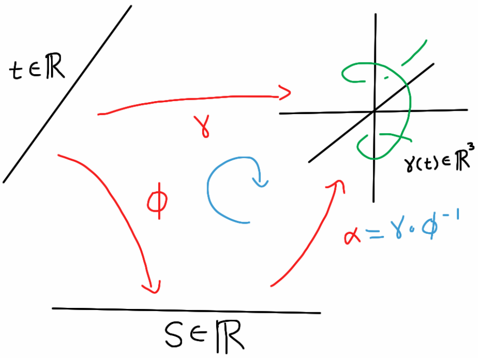
Puede ocurrir que t ya sea la longitud de arco de la curva α medido a partir de cierto punto t_0. En este caso, $|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = 1$.

Recíprocamente, si $|\alpha'(t)| = 1$, entonces

$$s = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0.$$

Reparametrizaciones

Reparametrizar una curva γ consiste en componer su parametrización $\gamma(t)$ con otra función $t = \phi(s)$, para obtener una nueva representación $\alpha(s) = (\gamma \circ \phi)(s)$ de la curva.



Longitud de arco

- Parametrizar una curva como función de su longitud de arco es equivalente a que

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau = t - t_0, \quad \forall t \in I.$$

  También es equivalente a hacer $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t \in I$.

  (El vector velocidad tiene magnitud constante 1). Esta propiedad será imporante para el desarrollo de la geometría de curvas.

Ejemplo

Consideremos un círculo de radio r, parametrizado por

$$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, y $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = r$. La longitud de arco a partir de punto $\mathbf{p} = \alpha(0) = (1, 0)$ es

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t r\, d\tau = rt.$$

Despejando t (como función de s), resulta $t = \frac{s}{r}$. Podemos entonces representar la curva como

$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

Con la representación anterior

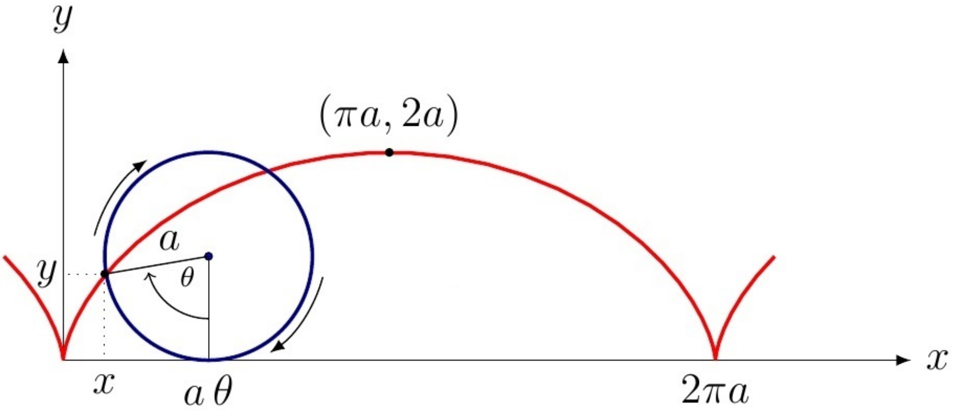
$$\alpha(s) = (r\cos\tfrac{s}{r}, r\sin\tfrac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se cumple

- $|\alpha'(s)| = |(-\sin\tfrac{s}{r}, \cos\tfrac{s}{r})| = \sqrt{\cos^2\tfrac{s}{r} + \sin^2\tfrac{s}{r}} = 1, \forall s.$
- $$\int_0^s |\alpha'(\sigma)|\,d\sigma = \int_0^s 1\,d\sigma = s, \quad \forall s.$$

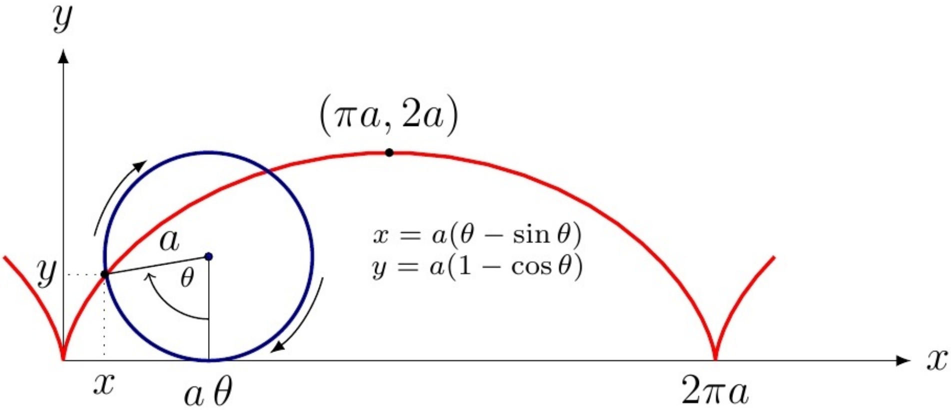
Ejemplo

La cicloide



Ejemplo

La cicloide



Ejemplo

Obtenemos la siguiente parametrización de la cicloide:

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$. Observe que para los puntos $t = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, son puntos singulares para γ.

Entonces, $\gamma(t)$ es una curva regular en el intervalo $(0, 2\pi)$. En este caso $|\gamma'(t)| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2}$.
Luego, la longitud de arco desde $t = 0$ es

$$s = \int_0^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t 2\sin\frac{\tau}{2}\, d\tau = 4 - 4\cos\tfrac{t}{2}.$$

Ejemplo

Despejando t en función de s, obtenemos $t = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)$.

Así, obtenemos la reparametrización

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \left(2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4}\right) - \sin\left[2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4}\right)\right], 1-\cos\left[2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4}\right)\right]\right)\\ &= \left(2\arccos\left(1-\tfrac{s}{4}\right) - 2\left(1-\tfrac{s}{4}\right)\sqrt{1-\left(1-\tfrac{s}{4}\right)^2}, 2-2\left(1-\tfrac{s}{4}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Otra reparametrización

Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, parametrizada por $s \in I = (a, b)$, podemos considerar una nueva curva $\beta = \alpha \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$, haciendo la reparametrización $\varphi : t(s) = a + b - s$.

Ambas α y β tienen el mismo trazo, pero recorrido en sentido contrario:

$$\beta'(t) = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d(\alpha \circ \varphi)}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \cdot (-1) = -\alpha'(s).$$

Esta reparametrización se llama un *cambio de orientación* de α.

Comentarios sobre curvas regulares

Kühnel define una *curva regular* como una cierta clase de equivalencia.

Definición

*Una **curva regular** es una clase de equivalencia de curvas parametrizadas regulares, donde la relación de equivalencia se obtiene a partir de cualquier transformación (que preserva la orientación) del tipo*

$$\varphi : (a, b) \to (a, b),$$

φ *biyectiva, continuamente diferenciable, con* $\varphi' > 0$.
Así, α *y* $\alpha \circ \varphi$ *se consideran equivalentes.*

Obs! Una transformación φ biyectiva, diferenciable (clase C^1), y con inversa φ^{-1} diferenciable, se llama un *difeomorfismo*. Si $\varphi' > 0$, este es un difeomorfismo que preserva la orientación.