Ciencia de Datos 2022

Lista 01

29.enero.2022

1. Considere los siguientes experimentos:

   a) Se lanza un dado regular, si se obtiene un 6, el dado es lanzado nuevamente. Describa el espacio muestral para este experimento.

   b) Se lanzan dos dados regulares, independientes. Sabiendo que se obtuvo un número par en el primer lanzamiento, cuál es la probabilidad de que la suma de ambos números sea par.

2. Demostrar las siguientes propiedades de sub-aditividad: Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección de eventos cualesquiera, entonces

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

3. Asumiendo que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, mostrar que las tres definiciones de independencia son equivalentes. Esto es, mostrar que:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \qquad \iff \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \qquad \iff \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

4. Tres caballos a, b, y c, entran a una carrera. Si la salida bac significa que b llega a la meta antes que a, y que a llega a la meta antes que c, entonces el conjunto de los resultados posibles es

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

   Sabemos que $\mathbb{P}(abc) = \mathbb{P}(acb) = \frac{1}{18}$, y que cada uno de otros cuatro resultados restantes tiene $\frac{2}{9}$ de probabilidad de ocurrir. Considere los eventos

$$A = a \text{ termina antes que } b \qquad \text{y} \qquad B = a \text{ termina antes que } c.$$

   ¿Los eventos A y B son independientes?

5. Suponga que $\mathbb{P}(A) = 0.5$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6$. Calcule $\mathbb{P}(B)$ si:

   a) A y B son disjuntos.
   b) A y B son independientes.
   c) $\mathbb{P}(A|B) = 0.4$.

6. Escribe un pseudocódigo (o código) para simular lanzamientos de una moneda en la computadora y obtener, mediante repeticiones, una estimación de la probabilidad de que en 10 lanzamientos ocurran:

   a) al menos 6 caras.
   b) al menos una secuencia de 6 caras (consecutivas).

S_i	S_1	S_2	S_3	S_4
$\mathbb{P}(E_1 \mid S_i)$	0.2	0.1	0.6	0.4
$\mathbb{P}(E_2 \mid S_i)$	0.2	0.5	0.5	0.3
$\mathbb{P}(E_3 \mid S_i)$	0.6	0.3	0.1	0.2

7. El diagnóstico de un médico con respecto a uno de sus pacientes es incierto. Ella duda entre tres posibles enfermedades. A partir de la experiencia pasada, pudimos construir la siguientes tablas: donde las E_i's representan las enfermedades y los S_j's los síntomas. Además, nosotros asumimos que los cuatro síntomas son incompatibles, exhaustivos y equiprobables.

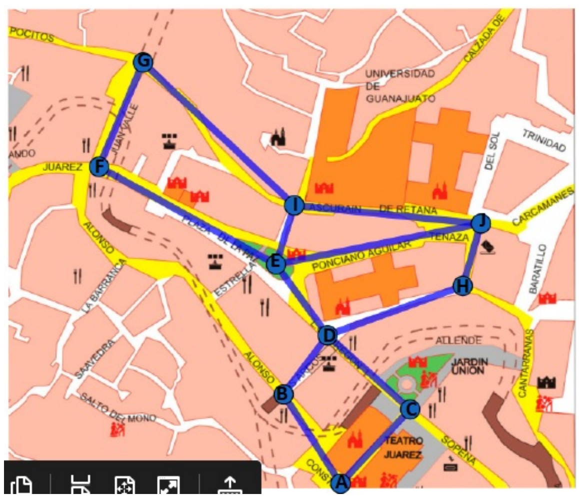
   a) Independientemente del síntoma presente en el paciente, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella sufra de la primera enfermedad?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente padezca la segunda enfermedad y presente el síntoma S_1?

   c) Dado que el paciente padece la tercera enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella presenta el síntoma S_2?

   d) Consideramos dos pacientes independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que no sufren de la misma enfermedad, si asumimos que las tres enfermedades son incompatibles?

8. Considera el siguiente grafo



   Cada calle (arista) entre dos nodos está bloqueada por una manifestación con probabilidad p. Supongamos que todos son eventos independientes. Calcula la probabilidad de poder caminar desde el punto A (nodo más abajo) al punto J (nodo más a la derecha).

9. a) Cierto o falso: si A y B son independientes, A^c y B^c son independientes.

   b) Cierto o falso: si A y B son independientes, A y B^c son independientes.

10. Lanzas dos dados. Define $X = \max\{D_1, D_2\}$ como el máximo de los valores obtenidos. Calcula la función de distribución acumulativa de X. Compárala con la función de distribución del promedio $\frac{1}{2}(D_1 + D_2)$.