Variables aleatorias discretas

Alan Reyes-Figueroa

Introducción a la Ciencia de Datos (Aula 07) 31.enero.2022

Variables aleatorias discretas

- distribución Uniforme $U[a..b]$,
- distribución Bernoulli $Ber(p)$,
- distribución Binomial $Binom(n, p)$,
- distribución Geométrica $Geom(p)$,
- distribución Poisson $Poisson(\lambda)$,

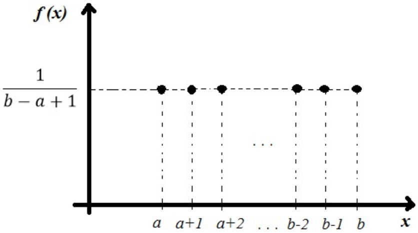
- distribución Rademacher $Rad(p)$,
- distribución Binomial Negativa $NB(r, p)$,
- distribución Hipergeométrica $Hypergeometric(N, K, n)$.

1. Distribución Uniforme

$$X \sim U[a..b] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}, \quad \text{para } k = a, a+1, \ldots, b.$$

Obs.

- Esta distribución depende de dos parámetros (de localización): a y b.
- El caso $a = b$, con $\mathbb{P}(X = a = b) = 1$ se llama una v.a. *degenerada*.

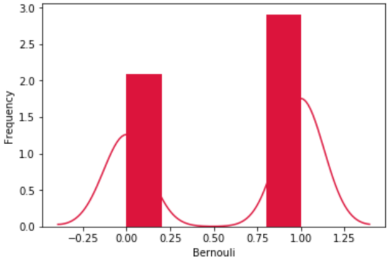


2. Distribución Bernoulli

$$X \sim Ber(p) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=1) = p,\; \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1.$$

Obs.

- La distribución es simétrica si, y sólo si, $p = 1/2$.
- $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$.



Variables aleatorias discretas

La distribución Bernoulli tiene una hermana gemela: la distribución de Rademacher.

$$X \sim Rad(p) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=1) = p,\; \mathbb{P}(X=-1) = 1-p, \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1.$$

Preguntas:

- ¿Cuál es la media y varianza de la distribución $Rad(p)$.
- Sean X, Y v.a., con $X \sim Ber(p)$ y $Y \sim Rad(p)$. Escribir X en términos de Y, y Y en términos de X.

La distribución de Bernoulli es importante para escribir situaciones donde se cuenta la ocurrencia de eventos. La variable $X \sim Ber(p)$ cuenta o indica la ocurrencia del evento de interés.

3. Distribución Binomial

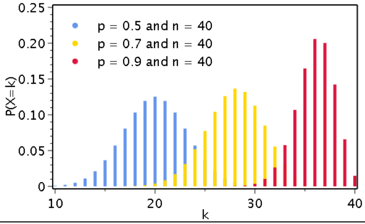
$$X \sim Binom(n,p) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Interpretación: Si $\{X_i\}_{i=1}$ son v.a. *i.i.d.* con $X_i \sim Ber(p)$, entonces

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n,p).$$

Obs.

- La distribución es simétrica si, y sólo si, $p = 1/2$.
- $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.



Variables aleatorias discretas

4. Distribución Geométrica

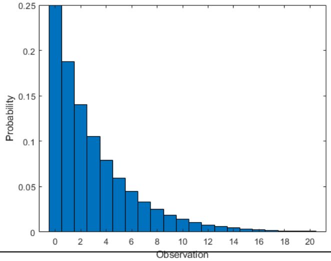
$$X \sim Geom(n,p) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \text{para } k = 1,2,3,\ldots$$

Interpretación: Si $\{X_i\}_{i=1}$ son v.a. *i.i.d.* con $X_i \sim Ber(p)$, entonces

$$X = \text{el momento del primer éxito en } \{X_i\} \sim Geom(p).$$

Obs.

- La probabilidad va decayendo en forma geométrica con k.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.



5. Distribución Poisson

$$X \sim Poisson(\lambda) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

En este caso,
$\mathbb{P}(X = k) =$ probabilidad de que el evento de interés ocurra k veces.

Obs.

- Cuenta el número de llegadas de un proceso con tiempos exponenciales $Exp(\lambda)$.
- $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Representa el número esperado de veces que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado.