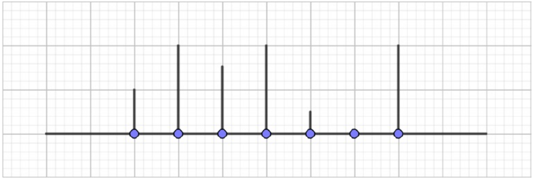
Variables aleatorias discretas

Alan Reyes-Figueroa

Introducción a la Ciencia de Datos (Aula 06) 26.enero.2022



Resúmenes de distribuciones:

- localización (promedio, rango, soporte o dominio);
- variabilidad (desviación estándar, varianza, entropía);
- forma de la distribución (kurtosis, histogramas, diagramas de probabilidad PP o QQ);
- simetría (sesgo, coeficiente de asimetría);
- En el caso de más variables: nos interesa algo que mida el grado de relación entre ellas (covarianza, correlación, información mutua).

Estadísticos

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.
Existen estadísticos con varios propósitos: localización, variabilidad, ...

Promedio: El **promedio** o **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X)$, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

en caso de que la suma exista.

Comentario: En la vida cotidiana usamos como promedio de $\{x_i\}_{i=1}^n$ a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Esperanza

En general,

Definición

*Dada una función $g(\cdot)$, se define la **esperanza** $\mathbb{E}(g(X))$ como:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\,\mathbb{P}(X = x),$$

en caso de que la suma exista.

Proposición

1. *(Linealidad)* $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) = a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2)$.
2. *(Independencia) Si X_1, X_2 son independientes, entonces* $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$.

Esperanza

Prueba:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) &= \sum_{\omega}(aX_1 + bX_2)(\omega)\mathbb{P}(\omega) = a\sum_{\omega} X_1(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_{\omega} X_2(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Como $X_1 \perp X_2$, entonces $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{(x_1,x_2)} (X_1X_2)(\omega)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)\\ &= \sum_{(x_1,x_2)} X_1(x_1)X_2(x_2)\mathbb{P}(X_1 = x_2)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)\\ &= \Big(\sum_{x_1} X_1(x_1)\,\mathbb{P}(x_1)\Big)\Big(\sum_{x_2} X_2(x_2)\,\mathbb{P}(x_2)\Big) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

<u>Solución</u>:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

b) $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(X) = 5\mathbb{E}(X)$.

Media, mediana y moda

Media: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Mediana: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Obs! F_X en general no es invertible!! Denotamos $Q_X : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ a la *función de cuantiles*, la inversa generalizada de F_X:

$$Q_X(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_X(x)\}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1.$$

Moda: Una **moda** de la distribución de X es cualquier máximo local de f_X. (unimodal, bimodal, ...)

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar \; J(c) = \; minimizar \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0$.
Luego $\sum_{i=1}^n p_i x_i = c \sum_{i=1}^n p_i = c \;\Rightarrow\; c = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X)$.

- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i |x_i - c|_1$ es: la *mediana* de X.
- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i |x_i - c|_0$ es: la *moda* de X.

Definición

Para la v.a. X y para un evento $A \in \mathcal{F}$, se define el ***promedio condicional*** *(o* ***esperanza condicional****) de X dado A como*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid A).$$

Definición

Para las v.a. X y Y, se define la ***esperanza condicional*** *de X dado que Y es igual a un valor y, como*

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y).$$

En general, definimos $\mathbb{E}(g(X) \mid Y = y) = \sum_x g(x)\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

Proposición

Sean X, Y, Z v.a., $a, b \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{E}(a \mid Y) = a$.
2. $\mathbb{E}(aX + bZ \mid Y) = a\mathbb{E}(X \mid Y) + b\mathbb{E}(Z \mid Y)$.
3. $\mathbb{E}(X \mid Y) \geq 0$ *si* $X \geq 0$.
4. $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$ *si* X, Y *son independientes.*
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)$.
6. $\mathbb{E}(Xg(Y) \mid Y) = g(Y)\mathbb{E}(X \mid Y)$. *En particular,* $\mathbb{E}(g(Y) \mid Y) = g(Y)$.
7. $\mathbb{E}(X \mid Y, g(Y)) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.
8. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y, Z) \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.

Proposición (Ley de la probabilidad total para esperanzas)

Sean X, Y v.a. discretas, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y} \mathbb{E}(X \mid Y = y)\, \mathbb{P}(Y = y).$$

Ejemplo: Alguien anda perdido en la subterranea de Guanajuato. Está en un cruce con 3 opciones. Un camino le lleva a la salida en 10 minutos en promedio, un segundo camino le regresa a su lugar en promedio 15 minutos y un tercer camino le regresa a su lugar en promedio 5 minutos. Siempre elige alguna opción, independiente del pasado. ¿Cuánto va a tardar en promedio para salir?

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\, \mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= (10m) \cdot \tfrac{1}{3} + (15m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(5m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{10}{3}m + \tfrac{15}{3}m + \tfrac{5}{3}m + \tfrac{2}{3}\mathbb{E}(T).
\end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{3}\mathbb{E}(T) = 10m \;\Rightarrow \mathbb{E}(T) = 30m$.

Varianza

Definición

Sea X una v.a. en $\mathbb{R}$. Definimos su ***varianza*** *como:*

$$Var(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big] = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,$$

en caso de que este valor esperado exista.

Propiedades:

- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces

$$Var(aX_2 + bX_2) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2).$$

Varianza

Prueba:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot) \geq 0,$$

  por ser suma de términos no-negativos.

- $$\begin{aligned} Var(aX) &= \mathbb{E}\big((aX - \mathbb{E}(aX)^2\big) = \mathbb{E}\big((aX - a\mathbb{E}X)^2\big) \\ &= \mathbb{E}\big(a^2(X - \mathbb{E}X)^2\big) = a^2\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

Prueba: Suponga que X_1, X_2 son independientes. Entonces, $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$. Luego

$$
\begin{aligned}
Var(aX_1 + bX_2) &= \mathbb{E}\big([(aX_1 + bX_2) - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big([a(X_1 - \mathbb{E}X_1) + b(X_2 - \mathbb{E}X_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big(a^2(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 + b^2(X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 + 2ab(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)^2\big) + b^2\mathbb{E}\big((X_2 - \mathbb{E}X_2)^2\big) + 2ab\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\mathbb{E}\big(X_1X_2 - X_1\mathbb{E}X_2 - (X_2\mathbb{E}X_1 + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) = a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2).
\end{aligned}
$$

Definición

*Dada dos variables aleatorias X_1, X_2 (definidas sobre el mismo espacio). Definimos su **covarianza** como:*

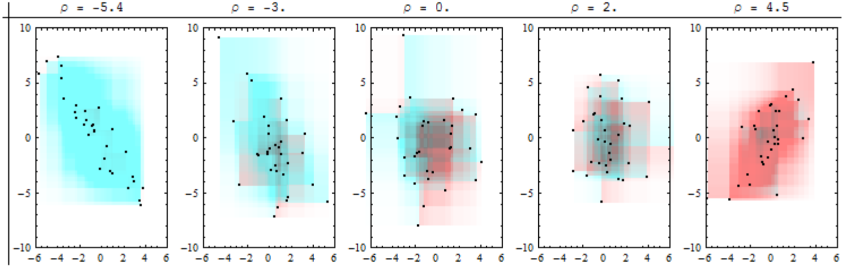
$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}\Big[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\Big],$$

en caso de que este valor esperado exista.

Propiedades:

- $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$.
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$.
- $Cov(aX, X) = aVar(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces $Cov(X_1, X_2) = 0$.

Covarianza



Definición

*Dada dos variables aleatorias X, Y, definimos su **correlación** (o **coeficiente de correlación**) como:*

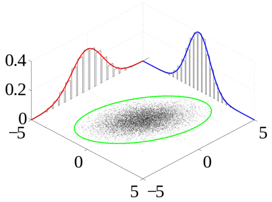
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}.$$

Propiedades:

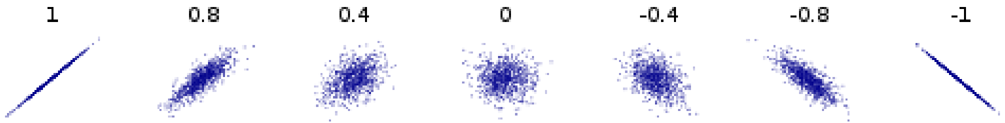
- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$.
- $\rho(aX, X) = sign(a)$.
- Si X, Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.

Correlación

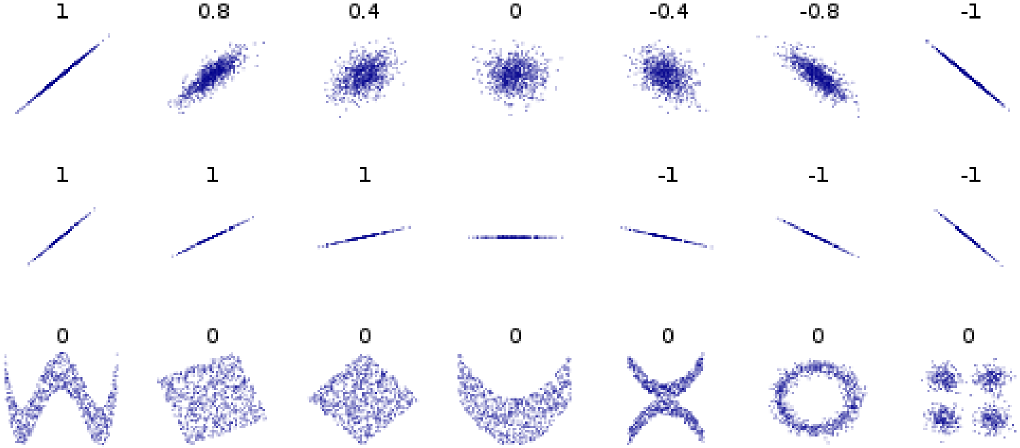
Por ejemplo, para el caso de dos v.a. normales X y Y:



tenemos



Correlación



Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.
¿Cómo medimos esta sorpresa o incerteza?

- Un evento que ocurre con alta probabilidad no genera sorpresa.
- Un evento que ocurre con baja probabilidad genera mayor sorpresa (más entre menor es $\mathbb{P}$).

¿Cómo definir $I(x)$? Tenemos varias alternativas simples

$$I(x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x)}, \qquad I(x) = 1 - \mathbb{P}(X = x), \qquad I(x) = -\log \mathbb{P}(X = x).$$

Definición

*Sea X una v.a. discreta. Definimos su **entropía de Shannon** como:*

$$H(X) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x)\, \log \mathbb{P}(X = x).$$

Comentario: Shannon definió la entropía en un contexto de teoría de la información (bits), usa $\log_2$. Si $p = 0$, usualmente se define $p \log p = 0$.

Definición

*Sea X una v.a. discreta. Definimos su **entropía de Gini** o **coeficiente de Gini** por:*

$$G(X) = \sum_{x} \mathbb{P}(X = x)\,\big(1 - \mathbb{P}(X = x)\big) = 1 - \sum_{x} \mathbb{P}(X = x)^2.$$

Ejercicios

1. Dibuja dos distribuciones o variables aleatorias (discretas) distintas, con mismo promedio y entropía, pero varianza diferentes.

2. Toma una v.a. $X \in \{0, 1\}$. Calcular la varianza y la entropía de Shannnon y de Gini en función de $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

   Compara la gráficas de $H(X)$ y $2G(X)$.

3. ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo para $H(X)$ y $G(X)$?

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***entropía condicional*** *de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \Big) \mathbb{P}(Y = y).$$

Obs. No es simétrica: $H_Y(X) \neq H_X(Y)$.

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***información mutua*** *de X y Y está dada por*

$$I(X, Y) = H(X) - H_Y(X).$$

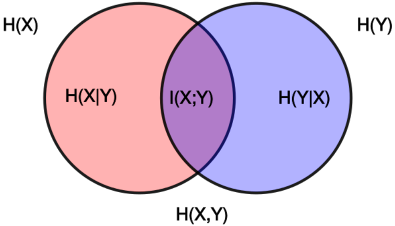
Proposición

$I(X, Y) = I(Y, X)$.

Definición

*La **entropía conjunta** de X y Y es*

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y \mathbb{P}(x,y) \log \mathbb{P}(x,y).$$



Un diagrama de Venn que muestra relaciones aditivas y sustractivas entre varias medidas de información asociadas con las variables X y Y. El área contenida por ambos círculos es la entropía conjunta $H(X,Y)$. El círculo de la izquierda (rojo y violeta) es la entropía individual $H(X)$, siendo el rojo la entropía condicional $H_Y(X)$. El círculo de la derecha (azul y violeta) es $H(Y)$, y el azul es $H_X(Y)$. El violeta es la información mutua $I(X,Y)$.

Definición

*Sean P una distribución discreta de probabilidad, la **entropía** de P es*

$$H(P) = -\sum_{x} P(x) \log P(x).$$

Definición

*Sean P, Q dos distribuciones discretas de probabilidad, la **entropía cruzada** (cross-entropy) de P y Q es*

$$H(P,Q) = -\sum_{x} P(x) \log Q(x).$$

*Además, la **divergencia de Kullback-Leibler** de P y Q se define como*

$$\begin{aligned} D_{KL}(P \parallel Q) &= -\sum_{x} P(x) \log \frac{Q(x)}{P(x)} \\ &= -\sum P(x) \log Q(x) + \sum P(x) \log P(x) = H(P,Q) - H(P). \end{aligned}$$