Ciencia de Datos 2021

Lista 01

21.enero.2021

1. Demostrar las siguientes propiedades:

   - Si A y B son dos eventos tales que $A \subset B$ entonces, $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
   - (Sub-aditividad). Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección de eventos cualesquiera, entonces

   $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

   - Mostrar la generalización del principio de inclusión-exclusión para el caso de tres conjuntos $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Escribir la forma general de este principio (sin demostrar).

2. Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

   a) Distancia recorrida por un automóvil con un litro de gasolina.

   b) Señal de radio que se recibe durante dos segundos.

   c) Juego entre tres jugadores: P, Q y R. El juego consiste en jugar partidas por parejas, comenzando P contra Q. Quien gane un partida juega con el otro jugador, hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego.

3. Dos eventos A y B son tales que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.1$. Encuentre la probabilidad de que:

   - Ocurra exactamente uno de los dos eventos A y B.
   - No ocurra ninguno de los dos eventos.

4. Suponga que $\mathbb{P}(A) = 0.5$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6$. Calcule $\mathbb{P}(B)$ si:

   a) A y B son disjuntos.

   b) A y B son independientes.

   c) $\mathbb{P}(A|B) = 0.4$.

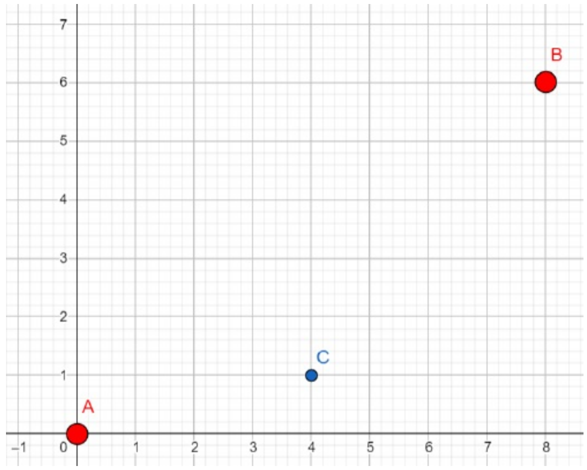
5. Escribe un pseudocódigo (o código) para simular lanzamientos de una moneda en la computadora y obtener, mediante repeticiones, una estimación de la probabilidad de que en 200 lanzamientos ocurran:

   a) al menos 7 caras.

   b) al menos una secuencia de 7 caras ó 7 cruces (consecutivos).

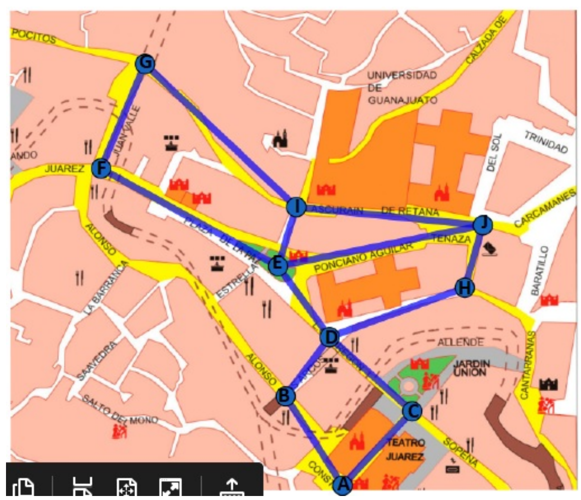
6. Tres máquinas M_1, M_2 y M_3 producen, respectivamente, 500, 1000 y 1500 partes por día, de las cuales 5%, 6%, y 7% son defectuosas. Al final del día, se toma al azar una parte producida por una de estas máquinas, y se encuentra que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que esa parte haya sido fabricada por la máquina M_3?

7. Un robot camina de punto A a punto B. Siempre hace un paso de tamaño 1: o a la derecha (de (x, y) a $(x+1, y)$) o hacia arriba (de (x, y) a $(x, y+1)$).



Si todos los caminos son igual probables, calcula la probabilidad de pasar por punto C.
Decides cambiar C de lugar tal que la probabidad de pasar por C sea máxima. ¿Cómo elegirlo?

8. Considera el siguiente grafo



Cada calle (arista) entre dos nodos está bloqueda por una manifestación con probabilidad p. Supongamos que todos son eventos independientes. Calcula la probalidad de poder caminar desde el punto A (nodo más abajo) al punto J (nodo más a la derecha).

9. a) Cierto o falso: si A y B son independientes, A^c y B^c son independientes.
   b) Cierto o falso: si A y B son independientes, A y B^c son independientes.

10. Una carta está en uno de tus 3 archiveros con igual probabilidad. Llama q_i la probabilidad de encontrarla buscando rápidamente en el archivero i, si la carta se encuentra en i, $i = 1, 2, 3$. Buscaste rápidamente en el archivero 1 y no encontraste la carta. ¿Cuál es la probabilidad que esté en este archivero?

11. Lanzas dos dados. Define X como el mínimo de los valores obtenidos. Calcula la función de distribución acumulativa de X.

12. Alguien quiere tratar de estimar el porcentaje de la tierra cubierta por agua a partir de n posiciones elegidas al azar y verifi car en *Google maps* si cada posición corresponde a tierra o mar.
    Para elegir una posición al azar sobre la tierra, propone el siguiente procedimiento:
    a) elige al azar la longitud en $[0, 360]$;
    b) elige al azar la latitud en $[-90, 90]$.
    Explica (en palabras) por qué lo anterior no genera una posición completamente al azar sobre la tierra y por ende su método va a fallar.