

# **REPASO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I**

ALAN REYES-FIGUEROA

INTRODUCCIÓN A LA CIENCIA DE DATOS

(AULA 02) 14.ENERO.2021

# Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

## Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$$

Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{2, 4, 6\}$	obtener un número par
$A_2 = \{3\}$	obtener 3
$A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$	obtener un número no múltiplo de 3

## Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

Probablemente aquí sea más simple representarlo como

$$\Omega = \{(a, b) : a, b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$$

Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), \dots, (6, 1)\}$	que los dados sumen 7
$A_2 = \{(1, 3), (3, 1), \dots, (6, 3), (3, 6)\}$	que aparezca al menos un 3

Otros espacios asociados:  $\Omega_1 = [1..6]$ , ¿Cuál es el mínimo de los dos dados?

## Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

- Lanzar una moneda.
- Lanzar una moneda hasta que aparezca “cruz”.
- Distancia recorrida por un automóvil con un litro de gasolina.
- Señal de radio que se recibe durante dos segundos.
- Juego entre tres jugadores:  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . El juego consiste en jugar partidas por parejas, comenzando  $P$  contra  $Q$ . Quien gane un partida juega con el otro jugador, hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego.

Pregunta: ¿Cómo definir  $\mathbb{P}$ ? ¿Cómo interpretarla?

## Definición (Espacio de probabilidad)

Un **espacio de probabilidad** es una estructura  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde

- $\Omega$  es un conjunto (no vacío). Los elementos  $\omega \in \Omega$  se llaman eventos.
- $\mathcal{F} \subseteq \Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad.

## Definición

Una  $\sigma$ -**álgebra**  $\mathcal{F}$  sobre un conjunto  $\Omega$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que satisface:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo complementos);
- $A_i \in \mathcal{F}$ , para  $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo uniones enum).

## Definición

Una función  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una **medida de probabilidad** si

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ,  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
- para cualquier colección enumerable de eventos exclusivos  $E_i \in \mathcal{F}$ , vale

$$\mathbb{P}\left(\bigcup E_i\right) = \sum \mathbb{P}(E_i) \text{ (enumerablemente aditiva).}$$

# Axiomas

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de medida con  $\mathbb{P}(E)$  la probabilidad de un evento  $E \in \mathcal{F}$ . Asumimos los siguientes supuestos para  $\mathbb{P}$ :

## Axiomas

1.  $\mathbb{P}(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$  (*no-negativa*).
2.  $\mathbb{P}(E)$  es siempre finita, y  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  (*unitariedad*).
3. *Cualquier colección enumerable y mutuamente excluyente de eventos  $E_i \in \mathcal{F}$ , satisface*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i), \quad (\sigma\text{-aditiva}).$$

## Propiedades

Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
2. (Conjunto vacío)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3. (Complemento)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ , para todo evento  $A \in \mathcal{F}$ .
4. (Cotas para  $\mathbb{P}$ ) Para todo evento  $E \in \mathcal{F}$ ,  $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ .
5.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

# Consecuencias

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

Prueba:

Definamos  $E_1 = A$ ,  $E_2 = B - A$ , y  $E_i = \emptyset$  para  $i = 3, 4, \dots$ . Entonces, por  $\sigma$ -aditividad (axioma 3),

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

Como el lado izquierdo anterior es una suma de términos no-negativos (axioma 1), entonces

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

# Consecuencias

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

Prueba:

Definamos  $E_1 = A$ ,  $E_2 = B - A$ , y  $E_i = \emptyset$  para  $i = 3, 4, \dots$ . Entonces, por  $\sigma$ -aditividad (axioma 3),

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

Como el lado izquierdo anterior es una suma de términos no-negativos (axioma 1), entonces

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

2. (Complemento)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ , para todo evento  $A \in \mathcal{F}$ .

Prueba:

$A$  y  $A^c = \Omega - A$  forman una partición de  $\Omega$ . Por  $\sigma$ -aditividad (axioma 3) y el axioma 2

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

luego  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

3.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

Prueba:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

# Consecuencias

4.  $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ , para todo evento  $E$ .

Prueba:

$\mathbb{P}(E) \geq 0$  por el axioma 1. Además,  $E \subseteq \Omega$ , y la monotonía de  $\mathbb{P}$  implican  $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

5. (Principio de Inclusión-Exclusión)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

Prueba:

Observe que  $\mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$  (por aditividad). Luego  $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ . Similarmente,  $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ . Ahora,  $A \cup B$  es la unión disjunta de  $A - B$ ,  $B - A$  y  $A \cap B$ . Por aditividad,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada  $A \subseteq \Omega$ , se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin  $A_i = \{\omega_i\}$ , entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

Caso general: Suponga que  $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

# Ejemplo

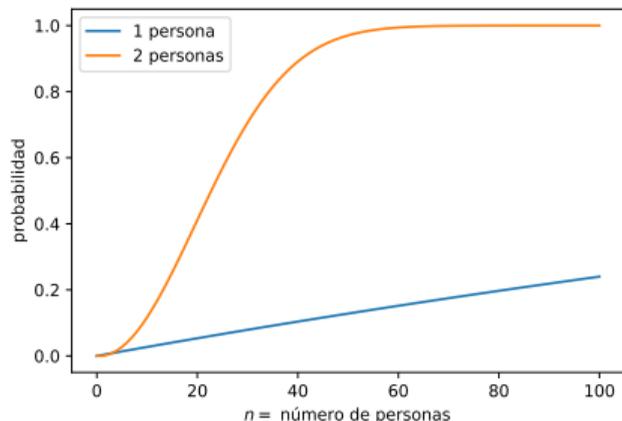
1. Calcula la probabilidad que en un grupo de  $n$  personas hay al menos una que cumple años el 14 de enero.
2. Calcula la probabilidad que en un grupo de  $n$  personas hay al menos dos personas que cumplen en el mismo día.

# Ejemplo

$n$	probabilidad 1 persona 14/enero	probabilidad 2 personas mismo día
0	0	0
1	0.002739	0
5	0.013623	0.027135
10	0.027061	0.116948
20	0.053391	0.411438
30	0.079008	0.706316
40	0.103932	0.891231
50	0.128181	0.970373
60	0.151774	0.994122
70	0.174729	0.999159

# Ejemplo

## Solución:



$$\mathbb{P}(\text{alguien cumple años 14.enero}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$\mathbb{P}(\text{dos personas cumplen años mismo día}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - (n - 1)}{365}, \quad n \geq 2.$$

## Distribución uniforme:

Experimento: Elegir un número al azar de  $[0, 2]$ .

Tenemos  $\Omega = [0, 2]$ .

$$A = [0, 1] \quad \mathbb{P}(A) = 1/2.$$

$$B = [0.4, 1] \quad \mathbb{P}(B) = 0.6/2 = 0.3.$$

En general, para  $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\int_A dx}{\int_{\Omega} dx}.$$

¿Se puede calcular  $\mathbb{P}$  siempre? No.

- Se requiere que  $\int_{\Omega} dx < \infty$ .
- Tenemos que limitarnos a conjuntos donde  $\int_A dx$  existe.

1. Se elige al azar un punto en un cuadrado con lado 4 cm. Calcula la probabilidad de que esté a una distancia menor de uno cm. de alguna de las esquinas.
2. Dos estudiantes quieren ir a comer juntos. Se citan entre las 7 y las 8 de la noche y están dispuestos a esperar a lo más 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que puedan ir a comer si sus horas de llegada son uniformes entre las 7 y las 8?

- A partir del experimento elegir algo al azar.
- Probabilidades como límite de frecuencias relativas de ocurrencia (**enfoque frequentista**)
- Por medio de apuestas: probabilidades como creencias (base del **enfoque bayesiano**)
- Sistema axiomático (Kolmogorov, 1933).

En áreas como computación e inteligencia artificial, se han elaborado otros sistemas axiomáticos (fuzzy sets, Dempster-Shaffer, ...)

- Kai-Lai Chung. *A Course in Probability Theory*.